LA PARÁBOLA COMO OBJETO MATEMÁTICO DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO EN EL CURSO DE MATEMÁTICAS DE GRADO DECIMO DEL INSTITUTO MISTRATÓ RISARALDA

CESAR JULIO DEL RIO GUAPACHA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PEREIRA 2018

LA PARÁBOLA COMO OBJETO MATEMÁTICO DESDE EL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO EN EL CURSO DE MATEMÁTICAS DE GRADO DECIMO DEL INSTITUTO MISTRATÓ RISARALDA

CESAR JULIO DEL RIO GUAPACHA

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:

Magister en Enseñanza de las Matemáticas

Director

Dr. Eliécer Aldana Bermúdez

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

PEREIRA 2018

Dedicatoria

A mis hijos, Yesenia y Yerson. Ellos son el motor de mi vida y por los cuales cada día emprendo nuevos viajes a pesar de las dificultades que se presentan. Gracias por estar ahí, siempre los voy a amar.

A mi familia, mi madre, mis hermanas y mi hermano por estar cerca de mí en los momentos más difíciles de mi vida y darme la fortaleza de seguir adelante. Me han hecho sentir que la vida tiene valor.

A Fanny… si a ti, que también inspiras desde lo más profundo para continuar. Mil gracias por todo y por haber estado ahí en los momentos más difíciles.

Agradecimientos

Agradezco a Dios por darme la fortaleza, para resistir tantos momentos difíciles porque a pesar de todo me ha permitido seguir luchando y hacer realidad este sueño

Al Dr Eliecer Aldana Bermúdez porque ha asumido la tarea de dirigir este trabajo de grado guiándome en las situaciones más difíciles de este. Agradezco su disposición y por haberme escogido como su pupilo. Siempre nos ha impulsado a seguir y trabajar con tesón para cumplir las metas que nos hemos propuesto.

A los profesores de la Maestría en la Enseñanza de las Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira por su aporte desde cada una de las disciplinas y seminarios que nos permitieron ahondar en conocimientos para reflejarlos en este trabajo de grado.

A mis estudiantes de grado decimo de IESA por abrirme sus corazones y dejar huella en mi trabajo. Con sus aportes, trabajo en equipo y actitud me enseñaron que las cosas difíciles se hacen fácil cuando se cuenta con la actitud de personas como ustedes.

A mi amigo Gabriel Tapasco Reyes por ser como mi padre, por sus consejos y "regaños" porque siempre creyó en mí y cuando la ruta era fatigante estabas ahí para darme un impulso. Hoy quiero que sepas que has sido el motor que me ha impulsado a seguir adelante.

Resumen

Este trabajo sobre el aprendizaje de la parábola desde el enfoque ontosemiótico es una apuesta que permite reconocer desde las practicas los elementos que rodean desde lo semiótico y semántico los conceptos matemáticos. En este sentido el enfoque ontosemiótico (EOS) presenta niveles de apropiación del aprendizaje, idoneidad didáctica y normas que se relacionan con los objetos matemáticos. Además los objetos de los que se menciona la EOS entran en unas concepciones especiales contradictorias entre sí. Para el proyecto se tuvieron en cuenta los objetos matemáticos personales e institucionales. También observar por medio del desarrollo de unas tareas la evolución presentada por los estudiantes durante las tareas.

Para iniciar se tomó como base las pruebas diagnósticas aplicadas a dos grupos diferentes. El grupo base integrado por los estudiantes que participaron de la investigación y otro grupo sobre el cual se suponía que ya se había estudiado el objeto matemático en el grado en el que se encontraban. A esta prueba se le hizo un análisis sobre los significados que tenían los estudiantes sobre este objeto y el nivel con respecto a la EOS en la cual se encontraban.

Luego se aplicó unas tareas a los estudiantes con el fin de observar como evolucionaban los conceptos y el conocimiento del objeto matemático. En este sentido, se hizo análisis de las tareas, desde las idoneidades epistémica, cognitiva e interaccional. Con este trabajo se evaluaron las tareas desde los indicadores propuestos y presentes en cada idoneidad. Así desde lo epistémico, el eje central eran lo relacionado con lo institucional de la parábola. Desde lo cognitivo, la aplicación de los significados personales e institucionales desde los indicadores propuestos. Y en la idoneidad se evaluó principalmente las relaciones entre docente-estudiante, estudiante-estudiante y con los mediadores o tareas que se propusieron a los estudiantes.

Finalmente se establece como los estudiantes avanzan en reconocer el objeto matemático desde los argumentos, las propiedades, las definiciones e imágenes sobre el objeto matemático de estudio.

Palabras claves

Enfoque ontosemiótico, idoneidad, cognitiva, epistémica, interaccional, objetos matemáticos, normas, niveles de la EOS, argumentos, propiedades, objetos personales, objetos institucionales, parábola, sección cónica,

Abstract

This work on the learning of the parabola from the ontosemiotic approach is a bet that allows to recognize from the practices the elements that surround from the semiotic and semantic the mathematical concepts. In this sense the ontosemiotic approach (EOS) presents levels of appropriation of learning, didactic suitability and norms that are related to mathematical objects. In addition, the objects of which the EOS is mentioned fall into special conceptions that are contradictory to each other. For the project, personal and institutional mathematical objects were taken into account. Also observe through the development of some tasks the evolution presented by the students during the tasks.

To start, the diagnostic tests applied to two different groups were taken as a basis. The base group composed of the students who participated in the research and another group on which it was assumed that the mathematical object had already been studied to the degree in which they were. This test was made an analysis on the meanings that students had about this object and the level with respect to the EOS in which they were.

Then, some tasks were applied to the students in order to observe how the concepts and knowledge of the mathematical object evolved. In this sense, the tasks were analyzed, from the epistemic, cognitive and interactional suitability. With this work, the tasks were evaluated from the indicators proposed and present in each suitability. Thus from the epistemic, the central axis was related to the institutional of the parable. From the cognitive, the application of personal and institutional meanings from the proposed indicators. And in the suitability the relations between teacher-student, student-student and with the mediators or tasks that were proposed to the students were evaluated. Finally it is established how the students advance in recognizing the

mathematical object from the arguments, the properties, the definitions and images about the mathematical object of study.

Keywords

Ontosemiotic approach, suitability, cognitive, epistemic, interactional, mathematical objects, norms, EOS levels, arguments, properties, personal objects, institutional objects, parabola, conical section,

Contenido

Indice De Tablas

Universidad Tecnológica de Pereira

Eliécer Aldana Bermúdez, doctor en Educación Matemática por la Universidad de Salamanca, España y profesor de Didáctica de la Matemática de la Maestría en Enseñanza de la Matemática, en la Universidad Tecnológica de Pereira.

CERTIFÍCA

Que la presente memoria titulada *"*la parábola como objeto matemático desde el enfoque ontosemiótico en el curso de matemáticas de grado decimo del instituto Mistrató Risaralda*"*, ha sido realizada bajo su dirección por *Don. César Julio Del Río Guapacha* y constituye su trabajo de grado para optar el título de Magister en Enseñanza de la Matemática.
Y para que tenga los efectos oportunos ante la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira, en el mes de marzo de dos mil dieciocho (2018).

Fdo. Eliécer Aldana Bermúdez
Director trabajo de grado

INTRODUCCION

El estudio de la parábola como objeto matemático desde el enfoque ontosemiótico es una tarea que hemos asumido corresponde a un amplio aspecto de la investigación que se ha dado en el ámbito de las matemáticas desde diversas posiciones teóricas en el caso del estudio de los objetos matemáticos. Desde esta concepción, uno de los más amplios lo constituye el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática (EOS). Desde este marco teórico se analizan aspectos como las configuraciones, los objetos, idoneidades, normas y meta normas que hacen hincapié en elementos como el significado y el ser de los objetos. Para el EOS los objetos se configuran en la práctica pedagógica desde las normas y por ello es importante hacer un análisis de las tareas que se presentan a los estudiantes con el fin de determinar a priori, sus significados y los engranajes que se pueden dar en las interacciones para configurar todos los objetos y hacer una análisis de ellos a través de las idoneidades didácticas. Para el caso del trabajo que presentamos a continuación las configuraciones a analizar las constituyen la idoneidad cognitiva, epistémica e interaccional que permiten tanto en la planeación de las tareas y la ejecución de las mismas, así como los análisis y reflexiones sobre la práctica y el aprendizaje que se puedan dar con el fin de mejorar la enseñanza y fortalecer la didáctica en esta área.

La parábola como objeto matemático (OM) desde la EOS, es un referente sobre el cual se puede reconocer diferentes aspectos relacionados con este OM como la posibilidad de encontrar el lenguaje, las propiedades, argumentos entre otros que emergen de prácticas educativas haciendo estas más idóneas. Tradicionalmente la parábola se enseña como función y como lugar geométrico desligando un elemento del otro. Desde el EOS se propone reconocer el significado de todos los aspectos relacionados con el objeto matemático que resultan de una entramada de actitudes, cogniciones epistémicas que se pueden abstraer en lo que se denomina la reificación del concepto (Sfard, 2014)

La situación particular del estudio de la parábola como objeto matemático desde el enfoque ontosemiótico, tiene la particularidad de que apoyados en mediadores se pueden descubrir tanto los aprendizajes de los estudiantes como los conflictos cognitivos que se pueden presentar a lo largo de las tareas presentadas a los estudiantes. El aspecto central de este entramado esta precisamente en la posibilidad de reconocer los significados tanto de las tareas como de las actitudes de los estudiantes desde los objetos propuestos en el EOS.

Esta investigación se ha divido en varias fases en las cuales se incluye realizar un estado del arte donde se enuncian los referentes importantes del problema de investigación planteados en el proyecto. Para su realización se retomaron investigaciones de varios autores (Aldana y López, 2013), (Godino, 2001, 2004, 2011), (Batanero, Godino y Font), entre otros. En primer lugar se planteó un anteproyecto de tesis en el cuales dieron a conocer las pautas para llevar a cabo este proceso. Después se organizó el marco teórico en el cual el eje centran lo constituye la base para la construcción de las técnicas de investigación. Luego se plantea una metodología, se realizan los análisis y se plantean las conclusiones del trabajo realizado.

La metodología de investigación propuesta en este proyecto será de corte cualitativo, correspondiente al análisis de ciertas actividades realizadas por medio de actividades a priori desde la propuesta de una idoneidad didáctica de corte cognitivo. Para realizarla se llevaran a cabo cuatro pasos fundamentales: estudio preliminar, diseño e implementación. Por un lado es menester reconocer los conceptos teóricos relacionados con el enfoque teórico ontosemiótico desde el las dimensiones personal e institucional desde la idoneidad epistémica y cognitiva que nos permite evaluar los conocimientos esperados con los conocimientos que los estudiantes adquieran por medio de las secuencias propuestas. Por otro lado, es importante reconocer como se entiende desde diversos aspectos el concepto de parábola relacionado con el aprendizaje y su concepción epistemológica, histórica y cognitiva, su concepto matemático y la forma como ha sido abordada en diversas investigaciones. Finalmente los abordaremos los conceptos teóricos relacionados con la metodología como son las trayectorias didácticas en los ámbitos mencionados y cada uno de sus pasos que la componen y la evaluación de este trabajo que se hará por medio de la guía de reconocimiento de objetos y significados.

Con este se pretende en esencial, dar respuesta a la pregunta de investigación, cumplir con los objetivos propuestas y los resultados esperados en los ámbitos propuestos. También fomentar la investigación, mejora en las prácticas de aula. En lo personal aportar al conocimiento científico y propender por mejores desempeños como docente e investigador.

CAPITULO UNO VISIÓN GENERAL DEL CAMPO DE ESTUDIO

El objeto matemático que se va a considerar dentro de la propuesta de investigación corresponde a la parábola. Es importante abordar este concepto por su relación teórica, praxis y desarrollo epistémico de los demás conceptos matemáticos. Además su cognición tiene mucha aplicación en ramas como la ingeniería, la arquitectura, la medicina entre otras.

Hemos planteado como problema de investigación, la poca significación que representa el objeto matemático en las prácticas de aula, asociados con estos, que hacen parte de del mismo. Además, los objetos personales e institucionales que giran en torno a este concepto, uno de ellos, de carácter epistémico y el otro cognitivo. El error en el aprendizaje tiene que ver fundamentalmente con los registros de representación que se presentan alrededor del mismo los casos de conversión (Duval, 2004). La teoría de las situaciones didácticas plantea una relación entre los aspectos didácticos y a didácticos que tienen que ver con los objetos matemáticos y el contrato pedagógico que se encuentran alrededor de estos. Además el problema de la semiosis de los objetos y su representación durante una idoneidad didáctica.

Dentro de la metodología para llevar a cabo la investigación se plantea una idoneidad didáctica de corte cognitiva con aspectos centrales como los preliminares a la investigación, la elaboración de una secuencia didáctica y el análisis de la misma, con el fin de obtener resultados de la investigación en lo referente a los tipos de objetos utilizados dentro del marco teórico.

Por otro lado con la investigación se espera avanzar en los campos de la investigación de la didáctica matemática contribuyendo en aspectos del aprendizaje y la enseñanza desde las concepciones teórica que permitan reformar tanto el aprendizaje como las prácticas educativas. Por otro lado aportar con el conocimiento científico en una parte tan compleja como lo es el de la didáctica en matemáticas con un marco teórico que ofrece múltiples matices.

PLANTEAMIENTO DE LA PREGUNTA O PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La enseñanza de las matemáticas en Colombia ha estado influenciada por agentes externos, más que por el mismo deseo de identidad nacional en el currículo de esta área. Explícitamente los lineamientos curriculares plantean que las reformas en la enseñanza de las matemáticas "no van más allá de algunas adiciones, supresión y de una organización de contenidos (MEN, 1998). Otro aspecto relacionado con el aprendizaje de las matemáticas está en las concepciones que desde los maestros se ha tenido, definiéndola como un cuerpo estático y unificado… estructuras interconectadas…conjugado de rejas….hechos y herramientas y quienes coinciden como una ciencia de los números y las demostraciones (MEN, 1998) demuestra que desde el ámbito académico y escolar se requiere de una visión más holística, que permita convertir el aprendizaje en un laboratorio para la investigación y producción de conocimiento.

desde los estándares curriculares, citando los lineamientos, se evidencia como ha sido asumido el aprendizaje delas matemáticas; cuerpos estables e infalibles de verdades absolutas… lo que condujo a suponer que solo se requería con estudiar, ejercitar y recordar un listado más o menos largo de hechos, definiciones, propiedades de los objetos matemáticos (MEN, 2004)

Uno delos procesos generales de los lineamientos curriculares es la resolución de problemas, acompañado de otros como la modelación, la comunicación, la ejercitación y razonamiento. Además, todos estos procesos desde los lineamientos están enfocados a situaciones del contexto.

La Resolución de Problemas (RP), como actividad humana, se remonta a los inicios de la humanidad, dado que en registros como el Papiro de Rhind los problemas ya están presentes en contextos de agrimensura o del comercio a través del uso de ecuaciones (Cruz, 2006). Cruz (2006), citado por Rodríguez y Parraguez (2014). En la resolución de problemas se ponen juego una serie de conocimientos, intereses y saberes a lo largo de un proceso cognitivo para su realización.

En el enfoque ontológico y semiótico (EOS) de la cognición matemática, la comprensión y el conocimiento no se conciben meramente en la dimensión mental, sino esencialmente en sus dimensiones personales e institucionales, involucrando por tanto los sistemas de prácticas operativas y discursivas ante ciertos tipos de tareas problemáticas (Godino,1994)

Este enfoque visualiza la naturaleza de un concepto matemático desde su representación y desde los objetos personales e institucionales. Su modelización se da teniendo en cuenta las dimensiones epistémica, que tiene que ver con el conocimiento del objeto a tratar; cognitiva que tiene que ver con la enseñanza, instruccional relacionada con la tarea dada. También, la dimensión normativa, una especie de contrato didáctico y axiológico que está enmarcada en lo valorativo y la afectividad, la dimensión ecológica, interaccional y mediacional. Todas estas relacionadas entre sí con los objetos matemáticos personales e institucionales.

Una de las principales dificultades asociadas al aprendizaje de la parábola están relacionadas con las pocas actividades planteadas por el docente, estrategias mal definidas (Gaitan, 2014) además agrega que existe un problema en las actividades propuestas. Es de anotar que este es un proyecto basado más en el método de la observación que de la participación dentro del mismo.

Dentro del aprendizaje de este objeto matemático en el aula, se deben tener en cuenta el significado que tiene las operaciones, símbolos y reglas relacionadas con el concepto. Una prueba aplicada a estudiantes de grado once de la institución donde se desarrolla la investigación, demostró que tiene grandes deficiencias en el reconocimiento de símbolos y operaciones relacionadas con ellos.

Uno de los principales obstáculos que (Duval, 1999) menciona en sus concepciones sobre el aprendizaje de los objetos matemáticos está relacionado con la presentación de los registros y la conversión que se hacen de estos. Estos aspectos se convierten en obstáculos para el aprendizaje.

(Salinas, 2010) Citando a Brusseau, plantea dentro de la teoría de las situaciones didácticas los elementos didácticos y a didácticos que influyen en el aprendizaje y como una situación didáctica puede convertirse en una situación que dificulta el aprendizaje en los estudiantes.

Aunque la situación planteada a los estudiantes de grado Undécimo del Instituto Mistrató, tenía relación con la parábola como objeto matemático abordado, los estudiantes solo dejaron evidenciar de forma incipiente una concepción operatoria de la parábola mas no un significado de todos los aspectos involucrados con la misma.

Uno de los principales problemas que tiene el aprendizaje de la parábola es que para los estudiantes este, es un objeto matemático abstracto que no tiene mucha utilidad en la vida humana y en los procesos de aprendizaje, razón por la cual al no verle su importancia, terminan, no dándole un verdadero sentido. Habría que indagar sobre significado tiene los diversos símbolos y concepciones relacionas con ella

Para la comprensión de la parábola los estudiantes universitarios muestran concepciones equivocadas y errores que son frecuentes en la solución de tareas (Aldana y Lopez, 2013). Muy posiblemente esos errores de ejecución de los que habla están relacionados con el aprendizaje errado del concepto, desde el bachillerato, dándose una definición formal e institucional sin tener en cuenta los objetos personales (Batenero, 1994). Para ello se hace necesario el reconocimiento de los objetos tanto personales como institucionales en el proceso de aprendizaje del objeto matemático de nuestro estudio. Por ello es importante referenciar que los errores de aprendizaje pueden estar relacionados con el desconocimiento del significado de los elementos relacionados con el conocimiento de la parábola.

Finalmente es necesario acotar que el aprendizaje de la parábola favorece los procesos de desarrollo de pensamiento espacial, numérico y algebraico. Desde el punto de vista algebraico, se debe tener en cuenta los conceptos de Van Hiele como un método que explica el razonamiento del pensamiento geométrico por estratos. (Gaitán, 2014), citando a este autor, refieren el aspecto del aprendizaje de la parábola a la comprensión, para así trabajar los contenidos más claramente.

En el siguiente proyecto se propone le aprendizaje de la parábola desde la resolución de problemas desde un objeto personal y un análisis del objeto institucional. Además, la concepción de objetos ostensivos y no ostensivos relacionadas con este.

Por un lado uno de los problemas más relevantes inmersos en el aprendizaje de los objetos matemáticos está relacionado con el significado, tanto del objeto como de los símbolos, procesos y representaciones que lo componen. Los lineamientos curriculares de lengua castellana plantean la significación como elemento central en el desarrollo de los sujetos (MEN, 1998)

Desde el punto de vista cognitivo, abordar el aprendizaje de la parábola conlleva a reconocer diferentes significados que tiene el objeto matemático, así como la visión que se tiene de su aprendizaje desde diferentes posturas, esto implica reconocimiento de diversas representaciones del objeto matemático a tratar.

Los planteamientos de Godino tratan de partir de una noción sistémica, para dar explicaciones de tipo antropológica, pragmática en el significado de los objetos matemáticos (Godino y Font, 1994). Desde esta perspectiva el aprendizaje involucra varias facetas del ser humano y se evidencian en las prácticas de aula y los significados que los sujetos tienen de los objetos matemáticos. Además teniendo un objeto matemático como la parábola subyacen en este concepto múltiples concepciones, que se hace necesario evaluarlos desde referentes sistémicos que permitan comprender el sentido del aprendizaje de cada uno de sus engranajes que problematizan las matemáticas de las cuales son emergentes y postulados esenciales de lo antropológico, lo pragmático (Godino, 2012)

En el trabajo matemático de estudio se debe analizar y definir claramente el concepto de parábola que vamos a abordar. Para ello es necesario hacer un análisis histórico, cognitivo de la misma. Desde (Ruiz, 2013), El concepto de parábola está asociado trascendentalmente con “cuadrático” e históricamente este término se puede tomar al menos desde cuatro aspectos: Las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones. De ahí que tiene múltiples definiciones que se hacen necesarios precisar.

Desde de las cónicas hay que remitirse a los griegos y sin duda uno de los más importantes fue Apolonio de Pergamo que formula las secciones cónicas aproximándose mucho al concepto de coordenadas.

Ya en el siglo XVII se define las cónicas como curvas correspondientes a ecuaciones de segundo grado y se establece el estudio de los lugares geométricos todo esto amparado en el desarrollo de la geometría analítica.

Desde el punto de vista de la física, a pesar de trabajos realizados desde la antigüedad por personajes como Aristóteles u Oresme hubo que esperar hasta el siglo XVII para que el desarrollo matemático de la época permitiera explicar matemáticamente los fenómenos naturales. Galileo introduce el concepto de función cuadrática en sus procesos de modelización de fenómenos de variación

Es muy difícil ubicarse dentro de un solo marco de referencia para estudiar un concepto amplio como es la parábola. Sin embargo, no se puede desligar de los otros conceptos o definiciones, pues allí se pueden encontrar sus aplicaciones. Pero si es necesario delimitarla al fin de convertirla en objeto de estudio. De allí que este objeto se pueda observar desde varios aspectos del enfoque ontosemiótico como son los significados, tanto personales como institucionales. Por tanto, si se aborda como objeto matemático, de este subyacen múltiples conceptos, personales como institucionales.

Con todo lo anterior la pregunta de investigación para esta tesis es:

¿Cómo son los aprendizajes que los estudiantes tienen sobre la parábola antes y después de realizar tareas desde marco teórico ontosemiótico?

CAPITULO DOS MARCO TEORICO Y METODO DE INVESTIGACION

Estado del arte

En el siguiente apartado del proyecto de investigación conocido como la parábola como objeto matemático desde el enfoque ontosemiótico en el curso de matemáticas de grado decimo del instituto Mistrató Risaralda, desarrollaremos los conceptos relacionados con las concepciones relacionadas con el problema del aprendizaje de la parábola desde diferentes conceptos relacionados con el trabajo antes mencionado. Para ello se analizaron los siguientes trabajos relacionados con objeto de estudio.

En primer lugar, un trabajo donde se aborda el aprendizaje de la parábola como lugar geométrico desde la teoría APOE, que pretendía mirar los aprendizajes de los estudiantes bajo este modelo. Desde su perspectiva, la investigación desarrolla conceptos de la teoría aplicados al aprendizaje en el contexto de la secundaria chilena. Para realizarla desarrollaron un texto guía y unos cuestionarios a los estudiantes. De acuerdo con los autores este estudio se centra en identificar las construcciones mentales de los estudiantes en la adquisición del concepto de parábola como lugar geométrico, además de describir su evolución cuando se analiza el aprendizaje de la parábola.

Otras perspectivas de investigación tratan de reconocer como se realiza el proceso de aprendizaje, haciendo uso de unos aspectos en los pasos que se deben llevar en los aspectos centrales del aprendizaje, como experiencia previa, el contexto, la evaluación, la comprensión y otras necesidades que se deben tener en cuenta en el aprendizaje del objeto matemático (Gómez, 2013). Este proyecto se centra en analizar los libros de texto para la enseñanza de las matemáticas.

La parábola como objeto de aprendizaje ha sido abordada desde la concepción epistemológica del aprendizaje, centra la atención de varios investigadores, es así como desee el punto de vista de Aldana y López (2013) aunque realizan una investigación sobre el aprendizaje de la parábola en estudiantes universitarios, esta es de carácter epistemológico de su aprendizaje con el marco teórico de las situaciones didácticas, aporta elementos que son esenciales para establecer un paralelo de como los estudiantes aceden al conocimiento del objeto matemático.

Desde el punto de vista ontosemiótico se aborda el reconocimiento de los objetos personales e institucionales relacionados con el aprendizaje de la parábola, sin embargo esta investigación es más dirigida a la enseñanza que al mismo aprendizaje

Abordar el concepto de parábola desde el aprendizaje de la misma, desde el marco teórico de Van Hiele, constituye el centro de investigación de (Hernández y Roncayo, 2013) que pretende reconocer en qué nivel de aprendizaje se encuentran los estudiantes, analizados desde el marco teórico antes mencionado.

Desde esta investigación, llevaron al aula los conceptos de Van hiele para darle un análisis al aprendizaje que los estudiantes referencian en su actividad académica dentro de las aulas. Para esto, llevaron una serie de actividades que les permitía, reconocer el estado en que se encontraban los estudiantes frente a los estratos de aprendizaje del marco teórico en mención. La parábola es como un ente abstracto, practico y analítico del conocimiento matemático (Gaitan, 2014). En este trabajo se aborda las dificultades de la comprensión de la parábola profundizando en el razonamiento del marco teórico de los niveles de comprensión de Van hiele.

Esta propuesta de investigación es de carácter descriptiva, y después de aplicar unos elementos relacionados con el objeto matemático de estudio se procede a hacer un análisis del cual se extraen conclusiones referentes al tema como: los estudiantes presentan baja comprensión, no prestan la atención adecuada y sus conocimientos son bajos, además replica una serie de problemas que ocurren en el aula de clase y que se convierten en un obstáculo para el aprendizaje.

A lo largo del artículo se define el concepto de parábola y luego se dan los elementos de instrucción que dan al proceso de acción dentro del aula para luego admitir unos juicios sobre docentes y dicentes durante el proceso, es de aclarar que el concepto de dicentes en este artículo se refiere en especial a los estudiantes.

Para (Jiménez, 2012) en su artículo "*una propuesta didáctica para abordar la parábola utilizando el procesador geométrico"*, hace uso de los medios tecnológicos con el fin de abordar el objeto matemático de estudio. Es otra forma de visualizar el concepto de parábola tiene que ver con el aspecto geométrico, especialmente relacionada con su construcción. Desde el proyecto los estudiantes aprendían la manipulación del objeto tecnológico e introducir conceptos del objeto matemático con el fin de explorar características del mismo. La investigación se desarrolla con estudiantes de la escuela preparatoria en la escuela Pedro Alba en México. Para el desarrollo teórico del proyecto se utilizan los registros semióticos como es el caso del registro algebraico o el registro geométrico (Duval, 1995) citado por (Jimenez, 2009). Además, en esta investigación no solo se aborda el concepto del objeto matemático, sino que además, el uso de las ayudas tecnológicas que pueden dinamizar el aprendizaje del objeto de estudio.

De este proyecto se llega a unas conclusiones muy importantes; los estudiantes mostraron gran interés por el uso del software, fueron en su mayoría capaces de construir una definición propia de lo que es una parábola y visualizar sus partes, además concluye la investigación que la mayoría delos estudiantes lograron visualizar de mejor manera las propiedades del objeto matemático.

De otro lado, (Rodríguez y Lugo, 2015) en el su artículo de investigación conocido como *construcción geométrica de las cónicas* tiene como objetivo realizar la construcción de las secciones cónicas desde el un software. Para ello elabora métodos para la elaboración de cada una. En el caso de la parábola plantean un solo método. Se plantea para su construcción las ecuaciones cartesianas, polares y paramétricas. Es de anotar que en este artículo no se realizan conclusiones ya que solo se trata de seguir unos pasos para la construcción de las mismas.

También el artículo de investigación González y Patiño (2007) métodos *para obtener los elementos de las secciones cónicas por medio de la derivación implícita*. En este proyecto se relaciona como utilizar la derivada implícita para obtener los valores de las secciones cónicas bajo ciertas condiciones. En el caso de la parábola anota que esta es fácil de identificar de acuerdo si uno u otro valor que la identifica es igual a cero. Este artículo plantea un método para encontrar las ecuaciones de las secciones cónicas de una forma particular, aplicado por estudiantes en los primeros semestres de la educación superior. En conclusión, el método de la derivada implícita se presenta como novedoso con un proceso explícitamente matemático, como conclusión además aseveran que le método es satisfactorio y exacto.

(Aldana y López, 2018) en una investigación de tipo histórica, epistémica, cognitiva y didáctica, estudian el objeto matemático en cuestión desde la concepción misma de la parábola, el origen y si evolución, centrándose finalmente en el aprendizaje para un grupo de estudiantes universitarios, apoyados por la ingeniería didáctica de Chavelard. En su estudio concluyen que la parábola se relaciona con diversos elementos matemáticos desde la geometría, ecuación y función cuadrática. Además el diseño del trabajo permite la realización de procesos de pensamiento como la argumentación, las inferencias y las hipótesis y otros más avanzados como la síntesis, generalización y definición

OBJETIVOS

Objetivo general

Fortalecer el aprendizaje de la parábola desde el marco teórico ontosemiótico, en estudiantes de grado decimo del Instituto Mistrató del municipio de Mistrató Risaralda, mediante la resolución de tareas.

Objetivos específicos

- Identificar los significados personales que tienen los estudiantes sobre el objeto matemático de la parábola mediante un diagnostico a priori.

- Configurar una idoneidad didáctica en las facetas epistémica, instruccional y cognitiva que permita reconocer los diversos objetos personales, ostensivos y no ostensivos involucrados en el objeto matemático mediante trayectorias de aprendizaje.
- Validar el aprendizaje del objeto matemático de la parábola, por medio un análisis de la guía de reconocimiento de objetos y significados con el fin de institucionalizar el concepto matemático.

MARCO TEÓRICO.

El trabajo que presentamos a continuación tiene como referente el marco teórico ontosemiótico del conocimiento matemático. En primer lugar la investigación desde este referente va dirigido al aprendizaje de la parábola desde la concepción ontológica y semiótica, lo que refiere reconocer lo epistémico y cognitivo del objeto matemático con los componentes personal e institucional y las mediaciones que el enfoque considera para este caso. Además se evaluara por medio de una idoneidad didáctica desde los componentes cognitivo, epistémico e interaccional.

El enfoque ontosemiótico de la cognición matemática tiene como elemento inicial la formulación de la ontología de los objetos matemáticos. Es decir el ser de este desde tres aspectos esenciales de las matemáticas como una actividad socialmente compartida con un lenguaje simbólico y una serie de conceptos organizados teniendo en cuenta diferentes dimensiones como son la cognitiva, epistémica, mediacional, interaccional ecológica y emotiva.

Para nuestra investigación hemos considerado las dimensiones de reconocimiento de objetos matemáticos personales e institucionales. Esta primera tiene que ver con el conocimiento que tienen los sujetos de ciertas cuestiones matemáticas que se trabajan desde dicho objeto. El otro concepto tiene que ver con los objetos matemáticos que ha sido aceptado por la academia. Por ello, son esas instituciones las que han manejado y les han dado su estatus.

Por otro lado se encuentran los objetos ostensivos que abordaremos en el proyecto. Es decir aquellos objetos públicos y que por tanto se pueden mostrar a otros (Godino, 2011), y por otra parte los objetos no ostensivos como dimensión de las matemáticas en la cual se identifican por medio de sus ostensivos asociados.

El enfoque ontosemiótico cuenta con diversa y abundante bibliografía, pero depende toda de la misma fuente. Este enfoque toma elementos de la teoría de las situaciones didácticas, teoría antropología de lo didáctico y de la semiótica como tal. Se trata de un enfoque en que se estudia en sí, el significado de los objetos. Se ha definido como un enfoque que ha nacido en el seno de la didáctica de las matemáticas (Godino J. , Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 2011).   Además se involucran elementos antes mencionados y los articula en aspectos como los objetos, las idoneidades, las normas, las configuraciones y las practicas desde distintos procesos de estudio. Entre los procesos de estudio que se evidencian dentro del enfoque están relacionados con las idoneidades que vamos a estudiar.

El enfoque contempla los objetos personales (Godino J. , Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 2011) como aquellos derivados de los conocimientos que tiene los sujetos sobre dichos objetos a tratar. También considera otros tipos de objetos como los institucionales (Godino, 1994). Estos dos tipos de objetos se configuran en las prácticas educativas. Este concepto se da desde diferentes concepciones sobre idoneidades didácticas que se pueden presentar.

Al abordar la parábola desde el aprendizaje, de una forma inmediata debemos tener en cuenta, los diversos enfoques que tienen que ver con el aprendizaje de esta desde diferentes concepciones teóricas. Sin embargo, en este trabajo de grado nos queremos referir en especial al enfoque ontosemiotico haciendo especial énfasis en la concepción del os objetos ya sean de carácter personal e institucional.

SIGNIFICADOS PERSONALES E INSTITUCIONALES

En el aprendizaje existen muchos conocimientos que pueden darse de acuerdo a situaciones que no hacen parte del acumulado de conocimiento que se ha dado durante la historia. Este conocimiento aunque no es reconocido por la academia, tiene un valor fundamental en los procesos personales de acercamiento en al mismo. Desde puto de vista los conocimientos previos juegan un papel importante en la formación de los demás saberes que se realicen durante el aprendizaje. (Godino, 1994)

Cuando nos referimos a los objetos institucionales debemos referirnos a estos como sistemas de prácticas (Godino, 2003). En este sentido es necesario tener en cuenta diversos tipos: implementado, evaluado, pretendido y referencial.

Desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje los objetos institucionales implementados se ubican dentro de un conjunto de prácticas que el docente pone en acción. Mientras tanto los objetos institucionales evaluados se refieren a aquellos que le docente utiliza para evaluar el aprendizaje de los estudiantes. Además en los objetos institucionales pretendidos se encuentran aquellos que se planifican dentro del proceso de estudio y que no garantizan que sean los realmente implementados. Estos pueden variar debido a lo que se conoce currículo oculto que tiene que ver con el contexto en el que se llevan las prácticas. Por último se reconoce un tipo de objetos institucionales conocidos como referenciales. Este tipo de objetos van más allá de la institución y se relacionan con la construcción epistémica que se ha realizado sobre el objeto matemático a través de la historia. En términos generales

Además dentro de la noción de objetos personales se requiere reconocer el significado global, que en términos de Godino (2001):

> *Corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar el potencial sujeto, relativas a un objeto matemático. Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional. Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida. En el análisis del cambio de los significados personales que tiene lugar en un proceso de estudio, interesará tener en cuenta los significados iniciales o previos de los estudiantes y los que finalmente alcancen"*

IDONEIDAD DIDÁCTICA

La idoneidad didáctica ha sido introducida desde la EOS, como una herramienta que permite pasar de una noción de didáctica Descriptiva explicativa a una didáctica normativa (Godino, 2011) y esta tiene una influencia especial pues orienta la intervención en el aula. Todos sus apuntes y definiciones corresponden a una serie de concepciones sobre la enseñanza, el aprendizaje y currículo para el desarrollo de las prácticas de aula y el trabajo de desarrollo del currículo con altos estándares. También es la base para la formación de profesores de matemáticas.

Toda la idoneidad didáctica esta mediada por una serie de idoneidades que componen el que hacer matemático y sirven como estructuración de esta. Entre ellas encontramos la idoneidad epistémica, cognitiva, ecológica, interaccional, mediacional, afectiva y ecológica. La idoneidad epistémica relaciona los conocimientos que se ha construido a través de la historia. Esta expresa el grado de representatividad de los significados institucionales implementado (o pretendido), respecto a los significados de referencia Godino (2011). Cuando se habla de los objetos matemáticos, está configurado por aquellos significados relacionados con los objetos pretendidos que dentro de las mediaciones que se propongan sirva para que los sujetos interactúen y construyan sus propios significados relacionados con el objeto matemático a estudiar.

Para medir el grado de una idoneidad epistémica de los contenidos implementados, es necesario tener claros los indicadores más relevantes que puedan darse respecto a esta. Para ello se plantean unos componentes sobre los cuales se basan estos indicadores.

Dentro de estos componentes que cuenta la EOS se encuentran los siguientes: situaciones problema, referida a los posibles; los lenguajes que se pueden dar; reglas, basadas en proposiciones, definiciones y procedimientos; por ultimo dentro de los componentes para esta idoneidad se encuentran las relaciones. Además para cada una de ellas se encuentran definidos una serie de indicadores como se muestra en la siguiente tabla

Tabla 1. Componentes e indicadores de una idoneidad epistémica (matemáticas)

Adaptado de la propuesta de Godino(2011)

COMPONENTES	**INDICADORES**
Situaciones-problemas	Se presenta de forma contextualuzada los objetos matemáticos como la contextualizacion, la ejercitacion y la aplicación relacionadas con la parabola. Generacion de problemas.
Lenguajes	Usos de modo de expresion verbal, graficas y simbolicas de los conceptos relacionados con la parabola. Nivel de lenguaje adecuado para el grupo que tiene que ver con el objeto matematico. Situaciones de expresión matemática relacionadas con el objeto matemático.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definiciones y procedimientos adaptados al nivel de los estudiantes del grado donde se desarrollara la investigación. Se proponen situaciones de expresión matemática y de interpretación donde se ponga en juego la zona de desarrollo próximo de los estudiantes.
Argumentos	Las explicaciones son adecuadas al nivel de los estudiantes que participan de la prueba. Se promueven situaciones en la que los estudiantes tienen que argumentar.
Relaciones	Los objetos matemáticos(relaciones, definiciones, proposiciones…) se relacionan entre sí. Se identifican y articulan los diversos significados relacionados con el objeto matemático de estudio.

Fuente: Godino, (2011)

El uso de situaciones problemas son importantes en las matemáticas para generar el conocimiento Godino (2011).

“*Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones”.*

Los diversos componentes relacionados con esta idoneidad para llegar a un grado alto se requieren de otros componentes del EOS. Así, si la parábola es el objeto matemático de estudio, los elementos relacionados con la misma tendrán que recopilar las situaciones problema que la caracterizan. Dentro de ellas se cuentan diversos aspectos como imágenes, estructura y aplicaciones. Además tareas que implican entender los demás elementos relacionados con el objeto matemático de estudio.

La idoneidad cognitiva está relacionada con el grado en que los contenidos implementados (pretendidos) son adecuados para los estudiantes, es decir están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos Godino (2011). Es importante esta idoneidad en términos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos. Así como de las representaciones que de estos objetos emergen para la enseñanza. Estos se desarrollan por medio de los componentes del EOS y están resumidos en la siguiente tabla.

TABLA DE COMPONENTES E INDICADORES IDONEIDAD COGNITIVA

Tabla 2. Componentes e indicadores de una idoneidad cognitiva

Adaptado de la propuesta de (Godino, 2011)

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos	Los estudiantes tienen la posiblidad de dar las definiciones que tienen sobre el objeto matemático a estudiar. Los contenidos abordados pueden movilizar el pensamiento de los estudiantes
Adaptaciones curriculares	Durante el proceso se manejan los ritmos de aprendizaje individuales Se privilegia el trabajo en equipos
Aprendizaje (Godino J. , Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 2011)	Los diversos modos de evaluación indican que los estudiantes adquieren los conocimientos y competencias pretendidos. Comprensión de los difrentes lenguajes asociados con el objeto matematico (Godino J. , Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 2011) La evaluacion tiene en cuenta los distintos ritmos de aprendizaje y los niveles de comprension de los estudiantes. Además las competencias que los estudiantes deben desarrollas durante el proceso de aprendizaje. (Godino J. , Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 2011)

Fuente: Godino 2011

IDONEIDAD INTERACCIONAL

(Godino, 2011), asume esta idoneidad como los modos de interacción, que favorecen la autonomia. Este concepto ya habia sido asumido por Piaget dentro del modelo constructivista, para este autor este es uno de los valores mas importantes en el aprendizaje. Esta tabla de datos contiene los elementos centrales de los componentes e indicadores realcionados con la idoneidad en mención y las adaptaciones que se pueden generar a partir de estos principios rectores.

TABLA DE COMPONENTES E INDICADORES IDONEIDAD INTERACCIONAL

Tabla 3. Componentes e indicadores de una idoneidad interaccional

Adaptado de la propuesta de Godino (2011)

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	-El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.) -Reconoce y resuelve los conflictos de los estudiantes (se hacen preguntas y respuestas adecuadas sobre el objeto matemático) -Se usan diversos elementos de las historia del objeto matemático y de sus usos en el contexto para capturar la atención de los estudiantes. -Se facilita la participación de los estudiantes en las prácticas de clase.
Interacción entre estudiantes	-Se favorece el diálogo y la interacción de los estudiantes dentro las actividades realizadas. -Los estudiantes refuerzan para sí mismos los conocimientos adquiridos. -Se evita la exclusión de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.
Autonomía	-En el desarrollo de las actividades los estudiantes plantean diversas posiciones frente a conceptos, procesos y utilizan diversas herramientas para comunicarlo a los demás estudiantes.
Evaluación formativa	-El proceso de evaluación se da durante todas las actividades y se realiza a todos los estudiantes en los diferentes momentos.

Fuente: Godino 2011

Finalmente, es importante destacar el papel individual que cumple la interacción que en términos de la EOS puede ser en tres momentos; docente-dicente, dicente-dicente y dicente-recursos para el aprendizaje

CONCEPTO DE APRENDIZAJE

El diccionario de la lengua española define aprendizaje de tres formas diferentes: acción o efecto de aprender un arte un oficio o una cosa; tiempo que se emplea en el aprendizaje y adquisición por la práctica de una conducta duradera. Si analizamos el aprendizaje de la parábola como objeto matemático de estudio, se hace menester tener claridad sobre los aspectos más relevantes que están directamente ligados a su comprensión dentro del marco ontológico. Además el diccionario Word Reference define la resolución como el resultado que satisface las condiciones planteadas en un problema o una ecuación y problemas como Proposición dirigida a averiguar el modo de obtener un resultado cuando ciertos datos son conocidos. También algunos autores plantean la resolución de problemas desde otras perspectivas como el desarrollo del pensamiento lateral y no lo vinculan directamente con números sino con diferentes situaciones de la vida cotidiana

Además la resolución de problemas está asociado con toda la actividad humana. Cada día nos ponemos en contexto de resolver distintas situaciones que son de carácter matemático como compras, intercambios, medición de tierras entre otros, que plantean verdaderos desafíos, también estos ha servido para la formalización de las matemáticas como una ciencia. Sin embargo en la actualidad no se puede hablar de simples problemas matemáticos, se trata de situaciones complejas que de cierta forma potencien el desarrollo de los procesos de pensamiento en los niños.

(Aguilar, 2009) citando a Bruner resalta que el aprendizaje llega con la comprensión de los objetos y está muy ligado a la conceptualización y representación de los mismos. Además, afirma que cada generación tiene su forma particular de aprendizaje, marcando este como el descubrimiento que se va dando dentro de una tarea intelectual. Así el aprendizaje tiene que ver con una serie de experiencias que el estudiante asume dentro y fuera del aula y que tiene que ver con los objetos para los cuales en términos de Piaget, por medio de la experiencia se van acomodando dando como resultado un nuevo conocimiento.

Por otro lado (Godino, 2003) relaciona el aprendizaje con la comprensión y el saber para este autor saber matemáticas, es algo más que repetir definiciones o ser capaz de identificar propiedades de números, magnitudes, polígonos y otra clase de objetos matemáticos. También expone que la persona que sabe matemáticas es capaz de usar un lenguaje y conceptos matemáticos para resolver un problema. Desde este autor se destaca a la importancia que tiene la resolución de problemas en el aprendizaje significativo. Es de anotar que esta concepción propia de los escritos de Ausubel y Bruner pone en manifiesto el uso de diversos aspectos del contexto en la enseñanza con el fin de que el conocimiento que se derive de ella tenga relevancia y sea adquirido por los estudiantes. En cuanto a e ello Godino afirma:

> *No debemos pensar en esta actividad sólo como un contenido más del currículo matemático, sino como uno de los vehículos principales del aprendizaje de las matemáticas, y una fuente de motivación para los alumnos ya que Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, permite contextualizar y personalizar los conocimientos. Al resolver un problema, el alumno dota de significado a las prácticas matemáticas realizadas, ya que comprende su finalidad*.

En cuanto al aprendizaje en matemáticas, plantea que este no se construye sobre el vacío, sino por los pilares construidos por los predecesores. Por lo tanto expone que los estudiantes aprenden matemáticas por medio de las experiencias que son proporcionadas por los profesores.

Evolución del concepto de parábola

El concepto de parábola ha tenido una evolución histórica desde la concepción cuadrática que le dieron los babilónicos al tratar de encontrar una ecuación de este tipo, pasando por la formalización que se dio en Grecia a este concepto. Sin embargo, la parábola fue tomada inicialmente como la figura que se obtiene al cortar seccionalmente un cono de revolución, luego se adopta la definición de esta como ya se había explicitado anteriormente, *conjunto de todos los puntos un plano que son equidistantes de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.* Recordar que la distancia de un punto a una recta es la menor distancia del punto a cualquier punto de la recta y se obtiene tomando la proyección perpendicular del punto sobre la recta. Luego si el punto llamado foco, no pertenece a la recta llamada directriz, entonces: Una parábola es el conjunto de todos los puntos de un plano, equidistantes de un punto fijo y una recta fija. El punto fijo se llama foco, y la recta fija, directriz.

Esta última definición corresponde ya a una concepción más formal dentro de la geometría analítica, luego que la geometría griega se basaba exclusivamente en el uso de regla y compas para sus representaciones, definiciones y demostraciones en geometría. Para esta concepción inicial de la parábola y en general de las cónicas, Apolonio de Perga, realizo los aportes más importantes para su deducción a partir de la concepción de solidos revolucionados que son cortados de una forma específica. De cualquier forma, divina o matemática, los griegos emprendieron la carrera por encontrar las características de las curvas en la conocida tarea que consistía en la duplicación del cubo. Además, los nombres de las cónicas tenían un significado especial dentro de las concepciones que ellos tuvieron de estos objetos matemáticos y que aún tiene vigencia. Es decir había un amplio conocimiento que se podía interpretar de una manera formal. Así como muchos elementos de las matemáticas y la geometría, este objeto matemático también fue formalizado e institucionalizado por los griegos. Esto tiene gran importancia dentro del uso de las cónicas porque permite entender matemáticamente diversos conceptos como proporciones de los puentes, elaboración de telescopios y objetos para observar el espacio, y una serie de aspectos en el desarrollo del conocimiento humano que ya todos visualizamos.

Más adelante el estudio inicial que habían emprendido los griegos fue retomado potenciado por matemáticos como descartes y otros con la formalización de otro tipo de geometría llamada analítica que retoma el concepto de los griegos sobre las cónicas y las lleva aún más allá. Por ejemplo Kepler hablaba de cinco de ellas, mientras los griegos solo sugerían tres. Además, los conceptos iniciales sobre la parábola fueron transformados y convertidos en ecuaciones, dándole una visión algebraica a los conceptos y buscando más acertadas formas de encontrar sus elementos. Es así, como algunos aspectos como el foco, la directriz, el lado recto y la misma ecuación se pudieron encontrar de forma analítica y no grafica como antes debía hacerse. En conclusión el estudio de la parábola tiene elementos tanto míticos como reales que ofrecen diversas aplicaciones y que le ha permitido a los sujetos avanzar en la ingeniería, las artes y demás áreas del conocimiento humano.

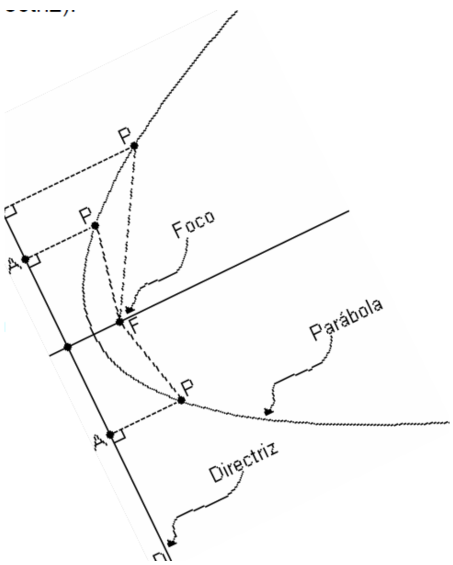
LA PARÁBOLA COMO OBJETO MATEMÁTICO

La parábola como objeto matemático presenta diversas perspectivas de estudio. Por un lado se puede estudiar como función cuadrática y por lo demás desde el punto de vista de la geometría analítica. La mayoría de los libros de texto abordan la parábola como un corte seccional que se hace a un objeto de revolución y determinan a partir de allí su origen.

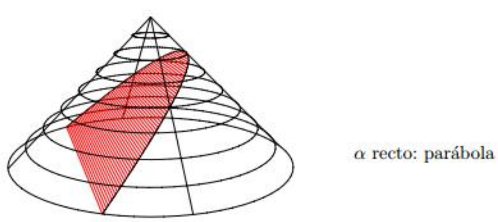
Matemáticamente la parábola se define como el conjunto de todos los puntos de1 plano que equidistan de una recta fija llamada directriz y de un punto fijo llamado foco fuera de la recta.

También presenta una característica muy especial relacionada con la distancia del foco y cualquier punto que siempre es igual a la distancia de ese punto con la directriz. Esta propiedad se aplica a todas las cónicas y hace parte del origen de la geometría analítica. Por ello estas figuras presentan en si características muy especiales que las catalogan en un grupo especial de la geometría analítica conocida como secciones cónicas. Además todos estos lugares geométricos se pueden representar mediante expresiones algebraicas

La interpretación grafica de la definición de la parábola se puede evidenciar en el siguiente esquema.



Fuente: http://www.fic.umich.mx/~lcastro/parabola.pdf



Fuente: http://www.ehu.eus/~mtpalezp/conicas.pdf

Además la parábola presenta unos elementos especiales que la caracterizan de las demás. Aunque entre ellas conservan características comunes. Por tanto, la parábola por ser una cónica, como las secciones tiene un eje, solo algunas tienen foco y las demás se relacionan entre si matemáticamente con algunos de los valores que la hacen única. Entre estos encontramos:

Eje de simetría: es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz.

Divide a la parábola en dos partes simétricas pasando por el vértice.

Vértice: es el punto donde la parábola interseca a su eje de simetría.

Cuerda: segmento de recta que une dos puntos de la parábola. Si la cuerda pasa por el foco se llama cuerda focal.

Lado recto: es una cuerda focal perpendicular al eje de la parábola.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN

Siempre que se trate de deducir la ecuación de una curva es necesario observar cuidadosamente las propiedades que cumplen sus puntos. Para deducir la ecuación de la parábola tendremos en cuenta lo siguiente:

Dado el foco y su directriz, elegimos un sistema de coordenadas de tal manera que la directriz sea horizontal, el eje de simetría coincida con uno de los ejes coordinados (en este caso hemos escogido el eje y) y el origen esté a la mitad de la distancia entre el foco y la directriz. Llamamos p a la distancia entre el foco y el origen ($p > 0$), de modo que la distancia entre el origen y la directriz también es P.

Las coordenadas del foco son F (0, p) y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Por definición de la parábola si elegimos cualquier punto de ésta, P(x, y) la distancia de P(x, y) a su foco F (0, p) es igual a la distancia del punto P(x, y) al punto L(x,-p) (obsérvese que L(x,-p) es el punto que se utiliza para determinar la distancia perpendicular a la recta $y =-p$).

Utilizamos la fórmula de distancia para obtener:

$$D(P,F)=D(P,L)$$
$$\sqrt{(x-2)^2+(y-P)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}$$

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y-p)^2}$$

Elevando al cuadrado a ambos lados tenemos:

$$(x-0)^2-(y-p)^2=(x-x)^2+(y+p)^2$$

Realizando las operaciones obtenemos:

$$x^2+y^2-2py+p^2=0+y^2+2py+p^2$$
$$x^2=y^2+2py+p^2-y^2+2py-p^2$$

De donde concluimos: $x^2=4py$. Así mismo, se utilizan estos principios para obtener de forma analítica las demás ecuaciones de la parábola teniendo como referencia los principios básicos relacionados con los elementos de la misma. De esta forma se puede obtener la ecuación general que describiremos más adelante.

Históricamente la evolución de la parábola ha estado ligada con el estudio de las demás secciones cónicas desde diversos momentos de la historia de las matemáticas, empezando en las concepciones babilónicas sobre el acercamiento al área de las figuras cuadradas. Los griegos con la formalización de las matemáticas y en especial, con dos aspectos centrales: la trisección de un ángulo y la duplicación del cubo. Más adelante la matemática del siglo XV dio un nuevo aire al estudio de las secciones cónicas con la introducción de las coordenadas cartesianas para el desarrollo grafico de estas.

Para Apolonio la definición de parábola estaba ligado con el término resultando igual. Esta consideración puede residir en el carácter reflexivo que presenta esta sección cónica.

Desde su concepción "*Parábola significa equiparación. El cambio de nomenclatura envolvía un cambio conceptual, toda vez que las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes, que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva. Por ejemplo, la conocida ecuación de la parábola con vértice en el origen es y2=lx, donde l es el latus rectum o parámetro dobles que se representa por 2p. Esta expresión de la parábola en forma de ecuación sintetiza precisamente el farragoso y larguísimo enunciado de la Proposición I.11 de Las Cónicas en forma de propiedad que cumple la sección cónica considerada, bautizada por Apolonio justamente aquí con el nombre de parábola. Este enunciado muy resumido viene a decir:*

«La parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y el latus rectum l [el rectángulo que aplicado sobre el latus rectum tiene como longitud la abscisa, en el lenguaje de la Aplicación de las Áreas]»."

Más adelante Descartes retoma el conocimiento de los griegos y le hace una síntesis y análisis de estos para profundizar más en la geometría analítica. Por una parte todo le conocimiento griego fue llevado al plano por medio de coordenadas y se puede establecer dimensionalmente la expresión gráfica de la misma. Por otro lado se encuentra la utilización del algebra árabe para alcanzar el máximo del a heurística de las secciones cónicas. Esto permite una mejor estructuración del análisis de estos elementos con una nuevo avance en el desarrollo analítico del algebra.

Fermat incluye letras que permiten definir de forma más general las ecuaciones de las secciones cónicas generadas, apoyándose en los estudios de Vieta. Allí utiliza letras del abecedario para expresar relaciones constantes a ecuaciones bicuadráticas.

CAPITULO TRES: METODOLOGÍA

La presente investigación de tipo cualitativa (Cerda, 2007), se tomó como aspecto para su desarrollo las fases de investigación de una idoneidad didáctica propuesta como metodología en los trabajos de Godino en el EOS. Dentro de esta se distinguen cuatro fases que se definen a continuación.

Estudio preliminar: este debe estar asociado con las actividades a didácticas que se propondrán a los estudiantes.

Diseño de la trayectoria didáctica: en esta etapa se seleccionaran un grupo de problemas, actividades y registros de representación del objeto matemático que será presentado a los estudiantes.

Implementación: presentación de las situaciones problemas a los estudiantes relacionadas con el objeto matemático de estudio, observación de las interacciones con el objeto matemático desde las representaciones y significados.

Evaluación y análisis: para la evaluación y análisis de la implantación de la secuencia didáctica y los significados y representaciones que se generan alrededor de ella, se aplicara una Guía de reconocimiento de Objetos y Significados (GROS)

Consideraciones finales, conclusiones y recomendaciones.

Esta investigación es de tipo cualitativa interpretativa. En ella se trata de analizar un fenómeno social relacionado con el aprendizaje del cual se pueden obtener algunos resultados frente a una teoría como el enfoque ontosemiótico en el cual se fundamenta. Además se hará teniendo en cuenta los elementos epistemológicos del objeto de investigación. Con ello se pretendió:

- Hacer un diagnóstico conocimiento del objeto matemático desde un análisis a priori desde lo epistemológico, cognitivo y de análisis

- Utilizar la Guía de Reconocimiento de objetos y Significados (GROS) para reconocer los objetos matemáticos desde el marco teórico ontosemiótico y determinar su caracterización.

La población que se utilizara en esta investigación serán 30 estudiantes del grado decimo del Instituto Mistrató.

METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Dentro de los aspectos planteados en la metodología para el proyecto de investigación se iniciara con actividades diagnosticas preliminares esto permitirá determinar qué tipo de actividades didácticas se presentaran a los estudiantes.

Para ello la preparación de la actividad consiste en el reconocimiento del objeto matemático desde trayectorias didácticas propuestas desde una idoneidad cognitiva que permita a los estudiantes en proceso de aprendizaje reconocer los diferentes significados del objeto matemático a tratar.

El propósito fundamental de esta investigación es generar aprendizaje a través del reconocimiento de los significados relacionados con los objetos matemáticos que se abordan en clase. Además reconocer los obstáculos que pueden presentarse en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Esto debido a que en el aprendizaje se hace necesario analizar diversos factores que influyen en él.

La presente investigación se realiza en un grupo de grado decimo de la Institución Educativa Instituto Mistrató. Esta institución es de carácter oficial la cual cuenta con un total de 1300 estudiantes, en todos los niveles de educación; preescolar, básica ciclo primaria y secundaria y educación media. Esta última se divide en tres modalidades actualmente; administración de empresas agropecuarias, sistemas y turismo y recreación. El grupo escogido es de 30 estudiantes los cuales están en la modalidad de sistemas.

Es un tipo de investigación de tipo cualitativo desde un referente de idoneidad cognitiva bajo el supuesto de que el aprendizaje de las matemáticas consiste en aprender una práctica operativa, pero sobre todo una práctica discursiva, que puede ser reconocida como matemáticas por un interlocutor experto (Juan Godino 2012). Dentro de la idoneidad cognitiva se pretenda mas alla de analizar si lo que se enseña esta a una distancia de lo que saben los estudiantes y, despues del proceso, si los estudiantes se acercan a lo que se queria enseñar.

CONTEXTO Y SUJETOS DE ESTUDIO

La institución donde se realizara la investigación será la Institución Educativa Instituto Mistrató del municipio de Mistrató Risaralda. Esta institución con 55 años de historia ha visto pasar una gran cantidad de estudiantes que ha derivado en una gama muy importante de profesionales. Actualmente el área de matemáticas está orientada por cuatro docentes, entre ellos dos docentes. Sin embargo tres de ellos tienen títulos diferentes a los de educación, una docentes es ingeniera electricista de la Universidad Tecnológica de Pereira (UTP), y los otros dos son ingenieros mecánico e industrial de la misma universidad.

Los sujetos de esta investigación son los estudiantes del grado decimo que aún no han abordado el tema de las secciones cónicas dentro de su plan de área en matemáticas.

MÉTODO DE INVESTIGACIÓN

El método de investigación para este trabajo es de corte cualitativo, pues se trata de describir e interpretar la forma como los estudiantes llegan al aprendizaje de un objeto matemático. (Buendía, 1998) establece este método de investigación como la adaptación de esta en la educación desde otros campos, además expresa que la educación como un ámbito de estudio y no una disciplina debe apoyarse en ella. Para nuestro estudio, este método de investigación nos sirve para reconocer el aprendizaje con diversas aplicaciones que puede darse en el proceso como tal. Para realizarlo, es necesario apoyarnos en la teoría del enfoque ontosemiótico que nos permite reconocer, niveles, idoneidades y características que emergen de la enseñanza y el aprendizaje de los objetos en matemáticas.

Por otro lado este enfoque nos permite reconocer, diversas posiciones críticas, hermenéuticas y fenomenológicas del proceso de investigación.

El método a utilizar en este caso es registrar la información obtenida e ir haciendo un análisis desde los niveles de comprensión propuestos en la EOS y los las idoneidades didácticas que se pueden dar desde la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes de grado decimo de la institución educativa Instituto Mistrató desde el concepto de la parábola a partir del modelo ontosemiótico.

ÁMBITO DE INVESTIGACIÓN

Este estudio se llevara a cabo en el Instituto Mistrató de este mismo municipio ubicado en el departamento de Risaralda. Para la realización se necesitan aproximadamente 16 horas de clase, lo cual requiere hacer adaptaciones a los demás contenidos programados por la institución y en el cual ya se le ha pedido el espacio a las directivas de la institución.

Este estudio se llevara a cabo con los estudiantes del grado 10 B, son 30 alumnos, de estratos socioeconómico bajo e hijos de personas que se dedican a las labores agrícolas y sus madres son amas de casa.

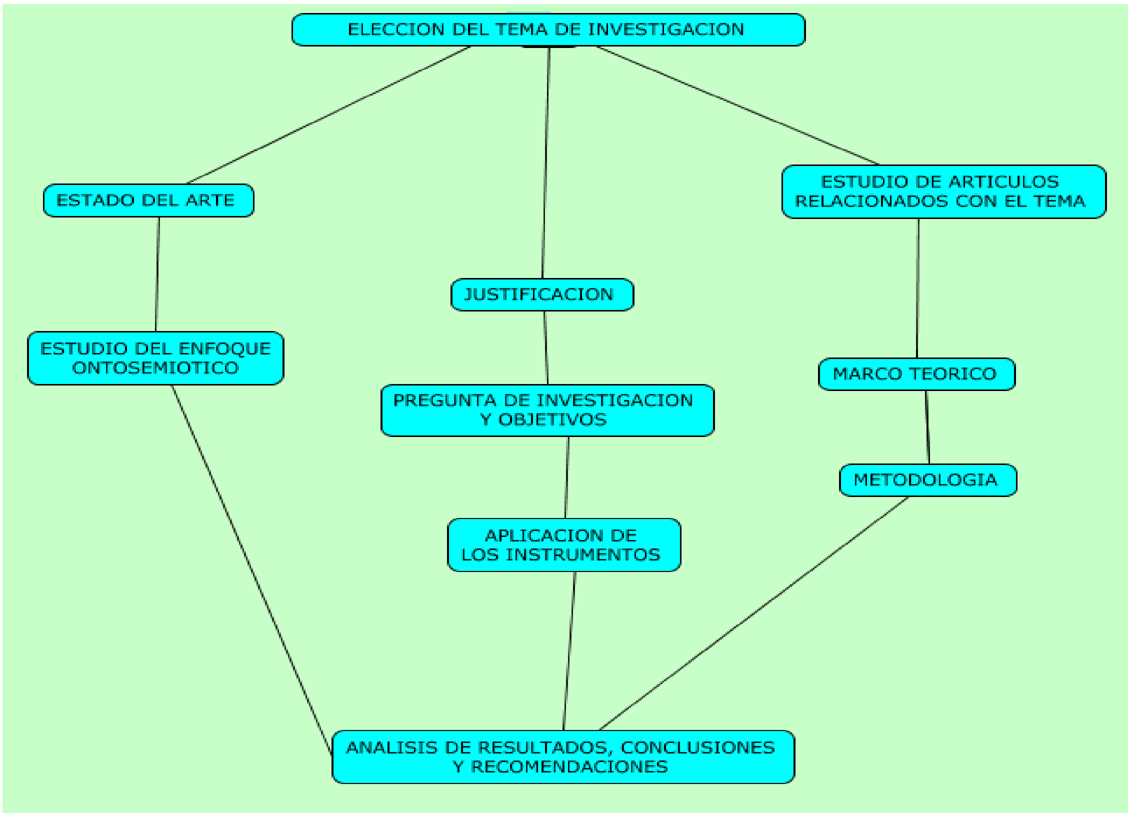
Es necesario anotar que los contenidos relacionados con el objeto aprendizaje, corresponden a este grado desde lo geométrico y así está diseñado en las mallas institucionales. En estas, se encuentran programadas para el último periodo, relacionado todas las secciones cónicas en el estudio.

POBLACIÓN

La población en la cual se desarrolla el proyecto corresponde a estudiantes del grado decimo del instituto Mistrató. Estos son 30 estudiantes encontrándose una distribución muy uniforme entre hombre y mujeres en la clase. El objeto matemático a tratar está definido para las grados decimo y undécimo dentro de los estándares de calidad del MEN y para el grado noveno en la reciente aparición de los derechos básico de aprendizaje (DBA)

FASES DE INVESTIGACIÓN

Tabla de fases de investigación



Fuente: producción propia

CAPITULO CUATRO FASE DE ANÁLISIS

En esta fase del proyecto se pretende reconocer la forma como se lleva a cabo la investigación y los que se puede derivar de los datos encontrados. Durante la investigación se realizaron grabaciones de clase, aplicación de la guía de reconocimiento de objetos y significados a priori y la ejecución de las secuencias didácticas programadas para tal fin. Dentro del trabajo se pretende reconocer los conceptos que tiene los estudiantes sobre la parábola desde la perspectiva de lo geométrico y sus elementos. Para ello la EOS plantea niveles de análisis que son en primer lugar los lenguajes,

Análisis preliminar

Dentro del análisis preliminar para este caso está la aplicación de la guía de reconocimiento de objetos y significados (GROS) del EOS. Esta actividad se hace con el fin de establecer el nivel en el que se pueden encontrar los estudiantes de grado decimo respecto a los lenguajes, símbolos, conceptos, situaciones problema

Desarrollo de los niveles de la EOS en la idoneidad didáctica

El desarrollo del proyecto de grado la idea de la configuración del enfoque o ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática de Godino, se enmarca en la construcción de significados que se identifican mediante unas situaciones planteadas a partir de las siguientes concepciones que tiene configuran este enfoque y que contribuyen en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Practicas matemáticas y didácticas: entendidas en el propósito de la construcción del aprendizaje como elementos emergentes de la instrucción matemática. En el EOS están pueden ser discursivas u operativas. Además se pueden configurar desde diversos conceptos como el lenguaje, las situaciones problemas, conceptos-definiciones, `proposiciones, procedimientos y argumentos.

Dentro del trabajo que realizamos estas juegan un papel relevante tanto en las pruebas iniciales como en las mediaciones realizadas, lo que denota el nivel en el cual se encontraban los estudiantes antes de la intervención y los avances que se pueden presentar por medio de mediaciones aplicadas al grupo.

Al final se determinara el nivel propuesto por el EOS en el cual se pueden ubicar los estudiantes respecto a la actividad a priori y las idoneidades que se configuran durante el proceso.

Configuraciones de objetos y significados: el concepto de objetos matemáticos acuñados en el EOS, tienen sentido para los sujetos en una serie de prácticas discursivas desde los cuales se abordan. Dentro del proyecto es importante abordar los objetos matemáticos personales y aquellos institucionales relacionados con la parábola.

NORMAS Y META NORMAS

Idoneidades. El enfoque ontosemiótico de la cognición matemática contempla las idoneidades como, cognitiva, epistémica, mediacional, interaccional, ambiental. Dentro del trabajo realizado se pretende evaluar el nivel de las idoneidades epistémicas, cognitivas e interaccional del EOS. En primer lugar dentro de la idoneidad epistémica, se pretende reconocer los objetos institucionales y los conceptos relacionados con el objeto matemático de estudio, en este este caso la parábola. Este se realizará desde un punto de partida presentado desde la guía de reconocimiento de objetos y significados que pretende obtener información de cómo la parábola, para el caso de esta investigación. También dentro del análisis de la idoneidad cognitiva se pretende reconocer los objetos personales relacionados con el objeto matemático de estudio y aquellos que resultan del desarrollo de las mediaciones (Secuencias didácticas).

Por último, la idoneidad interaccional que permite establecer la relación entre las idoneidades anteriores. Así mismo, identifica tanto objetos personales y objetos institucionales a priori y a posteriores del proceso de aprendizaje de los estudiantes por medio de las secuencias didácticas aplicadas.

Análisis de instrumentos aplicados

El primer instrumento aplicado es la guía para el reconocimiento de objetos y significados (GROS) del EOS, en esta se determinan entre otros, las imágenes, problemas, conceptos y argumentos relacionados con los objetos matemáticos de estudio y sus posibles significados. Con ello se pretende en una actividad a priori identificar el tipo de objetos personales que tienen los dicentes sobre el objeto matemático de la parábola.

Luego se aplica una guía con diferentes instrumentos que amplían los conceptos de la GROS. En este se abordan aspectos como conceptos, resolución de problemas, argumentos y definiciones, todos ellos por medio de preguntas e imágenes que constituyen el conocimiento personal que tienen los estudiantes sobre el objeto matemático en cuestión. En el anexo se puede evidenciar esta guía que es previa a la concepción y realización de las secuencias didácticas.

Se aplican tres secuencias didácticas, las cuales permiten a los estudiantes ahondar en los conceptos relacionados con la parábola como objeto de estudio. La primera secuencia describe brevemente la parábola en diversos contextos y las definiciones que se pueden dar preliminar sobre ellas. La segunda secuencia didáctica hace un estudio sobre la forma de construcción de la parábola desde diferentes aspectos y la identificación de algunos elementos de esta. En esta parte de la secuencia se puede realizar una intervención en la cual se explican los elementos fundamentales que la identifican. Así los estudiantes logran comprender algunos conceptos que están inmersos en este objeto matemático y diferenciarlos de otros, por último en la secuencia tres se ahonda en el reconocimiento del lenguaje algebraico relacionado con la parábola como es su ecuación canónica y ecuación general y las relaciones y trasformaciones que se pueden dar entre una y la otra.

Idoneidad epistémica

Para medir el grado de una idoneidad epistémica de los contenidos implementados, es necesario tener claros los indicadores más relevantes que puedan darse respecto a esta. Para ello se plantean unos componentes sobre los cuales se basan estos indicadores. Dentro de estos componentes que cuenta la EOS se encuentran los siguientes: situaciones problema, referida a los posibles; los lenguajes que se pueden dar; reglas, basadas en proposiciones, definiciones y procedimientos; por ultimo dentro de los componentes para esta idoneidad se encuentran las relaciones. Además para cada una de ellas se encuentran definidos una serie de indicadores como se muestra en la siguiente tabla

Tabla 4. componentes e indicadores de idoneidad epistemica.

Adaptado de la propuesta de (Godino, 2011)

COMPONENTES	**INDICADORES**
Situaciones-problemas	Se presenta de forma contextualuzada los objetos matemáticos como la contextualizacion, la ejercitacion y la aplicación relacionadas con la parabola. Generación de problemas.
Lenguajes	Usos de modo de expresion verbal, graficas y simbolicas de los conceptos relacionados con la parabola. Nivel de lenguaje adecuado para el grupo que tiene que ver con el objeto matemático. Situaciones de expresión matemática relacionadas con el objeto matemático.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definiciones y procedimientos adaptados al nivel de los estudiantes del grado donde se desarrollara la investigacion. Se proponen situaciones de expresion matematica y de interpretacion donde se ponga en juego la zona de desarrollo proximo de los estudiantes.
Argumentos	Las explicaciones son adecuadas al nivel de los estudiantes que participan de la prueba. Se promueven situaciones en la que los estudiantes tienen que argumentar.
Relaciones	Los objetos matematicos(relaciones, definiciones, proposiciones…) se relacionan entre si. Se identifican y articulan los diversos significados relacionados con el objeto matematico de estudio.

El uso de situaciones problemas son importantes en las matemáticas para generar el conocimiento (Godino, 2011).

"*Un punto central para el logro de una alta idoneidad epistémica será, por tanto, la selección y adaptación de situaciones-problemas o tareas ricas. Sin embargo, aunque las situaciones problemas constituyen un elemento central, el logro de una idoneidad epistémica alta requiere también atención, como propone el EOS, a las diversas representaciones o medios de expresión, las definiciones, procedimientos, proposiciones, así como las justificaciones de las mismas. Tales tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones".*

Los diversos componentes relacionados con esta idoneidad para llegar a un grado alto se requieren de otros componentes del EOS. Así, si la parábola es el objeto matemático de estudio, los elementos relacionados con la misma tendrán que recopilar las situaciones problema que la caracterizan. Dentro de ellas se cuentan diversos aspectos como imágenes, estructura y aplicaciones. Además, tareas que implican entender los demás elementos relacionados con el objeto matemático de estudio.

Idoneidad cognitiva

La idoneidad cognitiva está relacionada con el grado en que los contenidos implementados (pretendidos) son adecuados para los estudiantes, es decir están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos Godino (2011). Es importante esta idoneidad en términos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos. Así como de las representaciones que de estos objetos emergen para la enseñanza. Estos se desarrollan por medio de los componentes de la EOS y están resumidos en la siguiente tabla.

Tabla 5. componentes e indicadores de idoneidad cognitiva.

Adaptado de la propuesta de (Godino, 2011)

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos	Los estudiantes tienen la posiblidad de dar las definiciones que tienen sobre el objeto matematico a estudiar. Los contenidos abordados pueden movilizar el pensamiento de los estudiantes
Adaptaciones curriculares	Durante el proceso se manejan los ritmos de aprendizaje individuales Se privilegia el trabajo en equipos
aprendizaje	Los diversos modos de evaluacio indican que los estudiantes adquieren los conocimientos y competencias pretendidos. Comprension de los difrentes lenguajes asociados con el objeto matematico La evaluacion tiene en cuenta los distintos ritmos de aprendizaje y los niveles de comprension de los estudiantes. Además las competenciass que los es deben desarrollas durante el proceso de aprendizaje.

IDONEIDAD INTERACCIONAL

(Godino , 2011), asume esta idoneidad como los modos de interacción, que favorecen la autonomia. Este concepto ya habia sido asumido por Piaget dentro del modelo constructivista, para este autor este es uno de los valores mas importantes en el aprendizaje. Esta tabla de datos contiene los elementos centrales de los componentes e indicadores realcionados con la idoneidad en mención y las adaptaciones que se pueden generar a partir de estos principios rectores.

Tabla 6. Componentes e indicadores de idoneidad interaccional

Adaptado de la propuesta de (Godino, 2011)

COMPONENTES	INDICADORES
Interacción docente-discente	-El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.) -Reconoce y resuelve los conflictos de los estudiantes (se hacen preguntas y respuestas adecuadas sobre el objeto matemático) -Se usan diversos elementos de las historia del objeto matemático y de sus usos en el contexto para capturar la atención de los estudiantes. -Se facilita la participación de los estudiantes en las prácticas de clase.
Interacción entre estudiantes	-Se favorece el dialogo y la interacción de los estudiantes dentro las actividades realizadas. -Los estudiantes refuerzan para sí mismos los conocimientos adquiridos. -Se evita la exclusión de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.
Autonomía	-En el desarrollo de las actividades los estudiantes plantean diversas posiciones frente a conceptos, procesos y utilizan diversas herramientas para comunicarlo a los demás estudiantes.

Tabla 7.configuraciones de las tareas propuestas a los estudiantes

CONFIGURACIÓN DIDACTICA	PRACTICAS TAREAS	OBJETOS DE LA PARABOLA	PROCESOS
Prueba diagnóstica (aplicación de la GROS)	Trabajo con la guía de reconocimientos de objetos y significados	Representaciones de objeto, argumento, procedimientos y conceptos	Análisis a priori del aprendizaje de los estudiantes del concepto de parábola. Esta actividad se realiza con estudiantes del grado once.
Prueba diagnóstica	Trabajo con el	Representaciones de	Análisis a priori del

parte B	reconocimiento de objetos y significados, con el grupo con el cual se realizará la investigación.	objeto, argumento, procedimientos y conceptos	grupo base de investigación
Aplicación secuencia numero 1 (La parábola en contexto)	Resolución de la secuencia número 1, presentación de objetos, contexto de los objetos matemáticos y definiciones iniciales	Objetos personales, intensivos, conceptos y definiciones preliminares.	Reconocimiento contextual y preliminar del concepto de parábola.
Secuencia didáctica numero 2: reconocimiento de los elementos de la parábola.	Construcción de la parábola y sus elementos.	Identificación del vértice, el foco, la directriz y la cuerda focal de la parábola. Relaciones de distancia entre el foco y la directriz; el foco y otro punto de la parábola.	Elaboración de la parábola con el uso de regla y compas. Elaboración de la parábola con el uso de regla y cuerdas. Reconocimiento de los puntos.
Secuencia didáctica número 3: formalización del concepto de parábola	Uso del plano cartesiano para el establecimiento de la definición algebraica de la parábola.	Plano cartesiano, eje focal, posición de la parábola.	Definición formal de los conceptos relacionados con la parábola.

Fuente: (Godino, 2001)

ANALISIS PRELIMINAR DE LA PRUEBA DIAGNOSTICA

La prueba diagnostica realizada a los estudiantes tiene como referentes principales los conceptos de la EOS, en cuanto a los aspectos de los tipos de imgenes que se plantean los estudiantes respecto al objeto matematico relacionandolo con el entorno. Luego los demas objetos de la misma como son: situaciones problema, elementos linguisticos conceptos y definiciones y los argumentos y proposiones que se puedan generar.

En este sentido abordaremos algunos de los objetos matematicos de la GROS que tienen gran significado en el EOS. La concepcion inical aborda cuatro elementos esenciales: imágenes, conceptos, situaciones problema y simbolos matemáticos. El EOS propone como objetos matematicos ostensivos las imágenes, simbolos y graficos (Godino , 2011). Desde esta concepción la imagen como objeto ostensivo de la EOS, requiere de identificar los elementos emergentes del objeto matemático de estudio. En este sentido el estudiante de la figura que se muestra a continuación reconoce desde la propia concepcion el tipo de movivmiento que se da . para tal situacion el estudiante 1 describe la forma que toma la piedra del caso presentado e identifica el tipo de situacion que se puede presentar. Para el caso de la figura dos aunque se reconce el objeto matematico desde lo ostensivo (grafico)

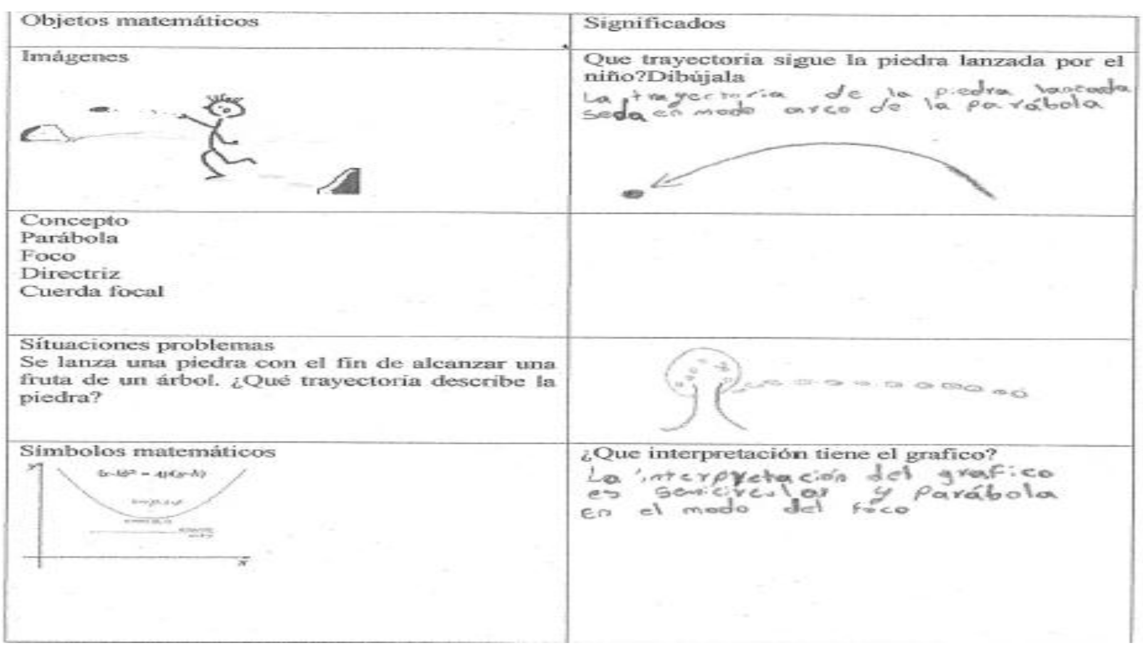
En la segunda columna donde se abordan los conceptos sobre parabola, foco, directriz, y cuerda focal. El estudiante 1 no da una definicion en este sentido, es decir no tiene en cuenta el significado de estos conceptos.

Los conceptos son ideas relacionadas con los objetos matematicos que pueden ser personales y que en se pueden definir como imágenes conceptuales, es decir aquellos que se dan por una definicion formal. Sin embargo para llegar a ella se deben asociar una serie de imgenes mentales sobre el objeto matematico de estudio.. En tal sentido, los conceptos toman fuerza de imagenes que se evalucion a obj etos formales de las matematicas.

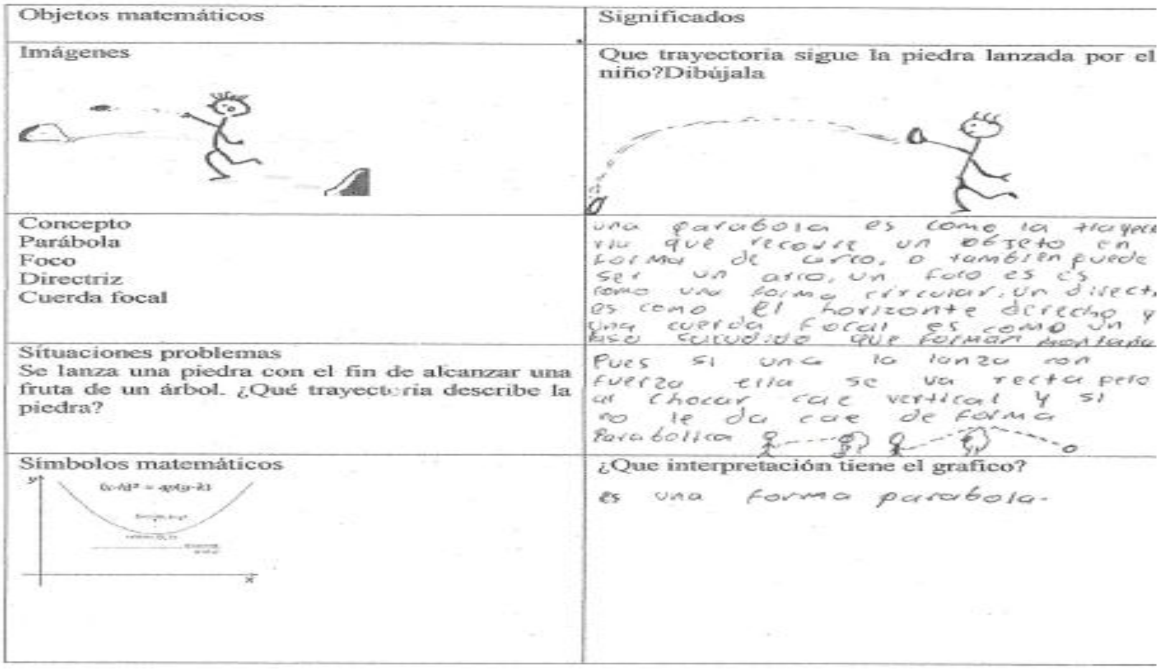
En la GROS se abordan las situaciones problema como posibles significados que pueden dar al resolver una actividad que signifique poner en juego una serie de (Turégano, 2006) imágenes. conceptuales. Al plantear una situacion de este tipo los estudiantes tratan de devolver la situacion a una imagen. El estudiante 1 trata de explicar de forma simbolica la trayectoria que define el objeto al ser lanzado. Por otro lado, esl estudiante 2 relata como pueden configurarse el movimiento y finalmente termina definiendo el tipo de objeto matematico a tratar.

Finalmente al tratar los simbolos matemáticos como elementos emergentes del EOS y presentes en la GROS, se evidencia los estudiantes abordan de forma elemental los conceptos relacionados con el objeto matematico, aunque lo mencionan , su argumento no representa una gran evidencia de las capacidades ontologicas y semioticas de los objetos matemáticos abordados. El estudiante 2 tampoco reconoce de una manera formal los conceptos subyacentes del simbolo matematico propuesto.

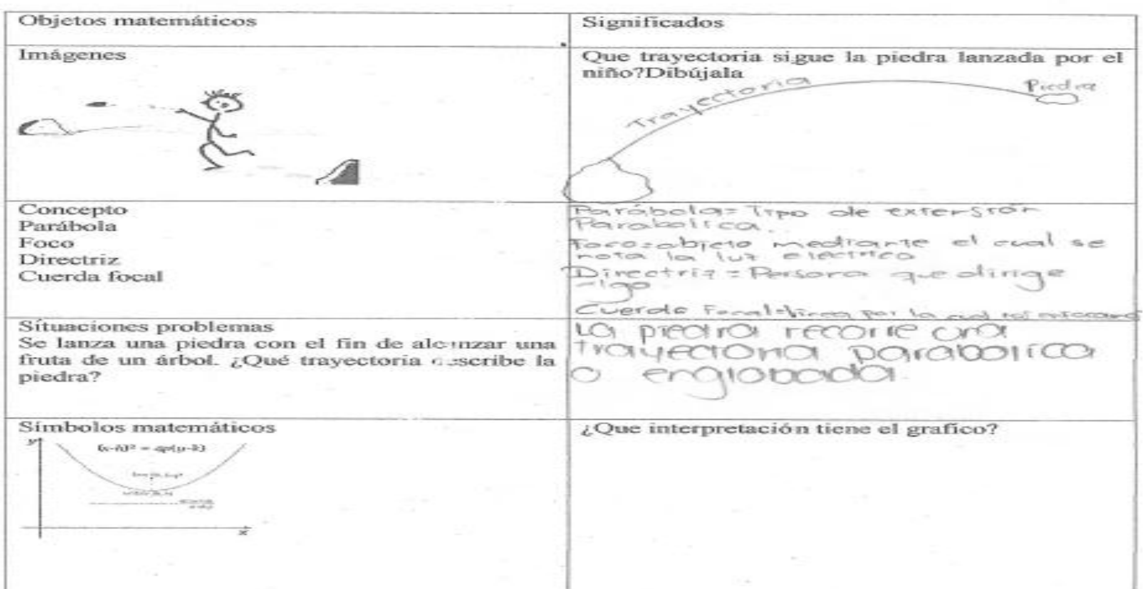
Estudiante 1



Objetos matemáticos	Significados
Imágenes	Que trayectoria sigue la piedra lanzada por el niño?Dibújala La trayectoria de la piedra lanzada seda en modo arco de la parábola
Concepto Parábola Foco Directriz Cuerda focal	
Síituaciones problemas Se lanza una piedra con el fin de alcanzar una fruta de un árbol. ¿Qué trayectoria describe la piedra?	
Símbolos matemáticos	¿Que interpretación tiene el grafico? La interpretación del grafico es semicirculos y parábola en el modo del foco



Objetos matemáticos	Significados
Imágenes	Que trayectoria sigue la piedra lanzada por el niño?Dibújala
Concepto Parábola Foco Directriz Cuerda focal	una parabola es como la trayectoria que recorre un objeto en forma de arco, o también puede ser un arco, un foco es es como una forma circular, un directr es como el horizonte derecho y una cuerda focal es como un liso curvado que forman [illegible]
Situaciones problemas Se lanza una piedra con el fin de alcanzar una fruta de un árbol. ¿Qué trayectoria describe la piedra?	Pues si una la lanza con fuerza ella se va recta pero al chocar cae vertical y si no le da cae de forma parabolica
Símbolos matemáticos $(x-h)^2 = 4p(y-k)$	¿Que interpretación tiene el grafico? es una forma parabola-



Objetos matemáticos	Significados
Imágenes	Que trayectoria sigue la piedra lanzada por el niño?Dibújala Trayectoria Piedra
Concepto Parábola Foco Directriz Cuerda focal	Parábola= Tipo de extensión Parabolica. Foco= objeto mediante el cual se nota la luz electrica Directriz = Persona que dirige algo Cuerda Focal= linea por la cual [illegible]
Situaciones problemas Se lanza una piedra con el fin de alcanzar una fruta de un árbol. ¿Qué trayectoria describe la piedra?	La piedra recorre una trayectoria parabolica o englobada.
Símbolos matemáticos $(x-h)^2 = 4p(y-k)$	¿Que interpretación tiene el grafico?

También se aplicó la prueba diagnóstica a estudiantes de grado undécimo de la institución educativa Instituto Mistrató. La prueba tenía como objetivo determinar el aprendizaje de los estudiantes del concepto de parábola desde la concepción de la GROS.

Por un lado es importante porque no da a reconocer la influencia que tiene el objeto matemático en las prácticas de aula desde la enseñanza tradicional.

Es de mencionar que los estándares de calidad para la excelencia educativa consideran el estudio de las secciones cónicas (entre ellas la parábola como lugar geométrico), descritos así:

> *Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.*
>
> *• Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y fi guras cónicas.*
>
> *• Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.*

Además dentro de estos estándares para Colombia se determina que al terminar el grado undécimo los estudiantes deben tener este tipo de competencias. Por tanto las pruebas se aplicaron a estudiantes de este grado pues en el plan de área de matemáticas de la institución, este objeto matemático debe ser abordado en el grado decimo. Como se puede observar en el cuadro siguiente este objeto matemático es abordado en el grado decimo en el cuarto periodo dentro del estudio de geometría analítica y los estándares y competencias están determinados dentro del mismo cuadro. También en el cuadro se evidencia los elementos de los estándares con los cuales se transversalizan

Tabla 8. Plan de Área de Grado Decimo Instituto Mistrató

GRADO: DECIMO INTENSIDAD HORARIA: 5 HORAS SEMANALES PERIODO: IV

PREGUNTA PROBLEMA

¿Qué aplicabilidad tienen las cónicas en las demás ciencias y que estructura tiene su expresión algebraica?

ESTANDARES BASICOS DE COMPETENCIA

- Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.
- Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.
- Reconozco y describo curvas y o lugares geométricos.
- Interpreto y comparo resultados de estudios con información estadística provenientes de medios de comunicación.

COMPETENCIAS:

- Reconocer las secciones cónicas en forma gráfica y algebraica.
- Explicar situaciones concretas usando representaciones tabulares, gráficas y algebraicas.
- Justificar el uso de una u otra estrategia en la solución de un problema ubicado en el contexto de las funciones.
- Proponer situaciones modelo para el planteamiento y solución de un problema en cualquier tipo de pensamiento matemático.
- Plantear y resolver problemas que involucren funciones trigonométricas.
- Plantear y resolver problemas que involucren conceptos de variación y variables estadísticas.

CONTENIDOS	INDICADORES DE DESEMPEÑO	ESTRATEGIAS	RECURSOS	CRITERIOS DE EVALUACION
Pensamiento numérico. Pensamiento algebraico, pensamiento métrico, pensamiento variacional pensamiento algebraico Pensamiento numérico Pensamiento espacial Pensamiento aleatorio	Usa métodos algebraicos y conocimientos respecto a las funciones trigonométricas, para resolver ecuaciones trigonométricas. Reconoce las propiedades y características de la función lineal y las utiliza en la solución de problemas. Reconoce las propiedades y características de la función lineal y las utiliza en la solución de problemas Reconoce las secciones cónicas a partir de sus Expresiones algebraicas y viceversa. Describe, compara y establece relaciones entre un conjunto de datos, su representación y la probabilidad matemática esperada	Activación del conocimiento por medio de preguntas previas. Trabajo individual guiado Trabajo cooperativo. Trabajo por equipos Resolución de problemas Conceptualización. Talleres prácticos. Actividades de profundización. Tareas pedagógicas o actividades de aplicación.	Textos escolares Materiales didácticos Recursos elaborados por la institución Equipos electrónicos Fotocopias Instrumentos propios del área. Recursos TICs Internet	**Evaluación Diagnostica** por medio de talleres, preguntas previas, preguntas problematizadoras. **Evaluación formativa**, se realiza por medio de pruebas informales, exámenes prácticos, observaciones, listas de chequeo o cotejo, registros de desempeño. **Autoevaluación,** se aplica un formato donde el estudiante responde un cuestionario que contiene descripciones del curso, dando una valoración de su desempeño en el proceso de aprendizaje.

Fuente: proyecto educativo institucional Instituto Mistrató

Como se puede apreciar dentro de los estándares se reconoce toda una serie de elementos de las secciones cónicas que deben ser perfectamente administradas dentro del aula de clase, para llevar a cabo un proceso de los indicadores solo utilizan un indicador para refrendar los tres estándares básicos de aprendizaje. Además las secciones cónicas como tal como están planteadas en los estándares no se desarrollan de igual forma en los desempeños y las actividades de aula, es decir que hay que ir más allá del plan de área para entender cómo se puede desarrollar el objeto matemático dentro del aula de clases desde el EOS. En este tipo de plan de área no se evidencian las facetas, los niveles de aprendizaje y los presupuestos de este enfoque. Por tanto es esperable que los estudiantes al ser interrogados no tengan mayores elementos ya que no se ha contextualizado el objeto matemático y ha sido instrumentado el aprendizaje de la parábola para este conjunto de estudiantes. Por otro lado los derechos básicos de aprendizaje DBA contempla las secciones cónicas para el grado undécimo y están determinadas así:

> *Conoce las propiedades geométricas que definen distintos tipos de cónicas (parábolas, elipses e hipérbolas) en el plano y las utiliza para encontrar las ecuaciones generales de este tipo de curvas. Por ejemplo, una elipse es el conjunto de puntos cuya distancia a un foco más la distancia al otro foco es siempre la misma.*
>
> *Conoce algunas aplicaciones de las curvas cónicas. Por ejemplo: las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas con el sol en uno de sus focos. Las parábolas se utilizan para crear la parte reflectiva de las linternas.*

> *Todos los rayos de luz que emanan del foco, salen paralelos al eje de simetría al reflejarse sobre la parábola.(DBA Nº 11 grado 11)*

En esta parte de los documentos que se conocen como oficiales se ve claramente que el objeto matemático debe abordarse desde diversos elementos y las reglas matemáticas que subyacen de ellas. Así los estudiantes debe aprender sobre los objetos matemáticos o de las matemáticas en sí, conociéndolas comprendiéndolas, construyendo un nuevo conocimiento desde la experiencia y los conceptos previos (Fernandez, 2005).

Además, las diferentes actividades que se realizan en el aula parecen no generarles a los estudiantes un reconocimiento desde lo personal y lo institucional del objeto matemático en cuestión. A continuación mostramos algunos de los aspectos que desde la GROS se realizó a estudiantes de grado undécimo de la Institución Educativa Instituto Mistrató.

De los aspectos de la GROS evaluados a un total de 31 estudiantes de grado once se les planteo inicialmente una situación problema, esta se puede definir como una actividad que pone en juego una serie de conocimientos para ser resuelta por parte de un sujeto frente a una serie de conceptos matemáticos relacionados con un objeto matemático. Al respecto (Obando G. J., 2005), define la situación problema como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje. Más adelante citando a Moreno y Waldegg: *La situación problema es el detonador de la actividad cognitiva, para que esto suceda debe tener las siguientes características: • Debe involucrar implícitamente los conceptos que se van a aprender. • Debe representar un verdadero problema para el estudiante,* *pero a la vez, debe ser accesible a él. • Debe permitir al alumno utilizar conocimientos anteriores [...] (2002,56)* et al

En este sentido se les planteo una situación que tiene que ver con el contexto matemático en el cual los estudiantes debían hacer uso de los conocimientos que para ello, debieron haber adquirido durante el proceso enseñanza-aprendizaje.

Sin embargo frente a la situación planteada que está planteada de la siguiente manera: Una antena parabólica mide 16 m de ancho a una distancia de 6 m del vértice, ¿qué ancho tiene esa antena a la altura del foco?

En esta actividad los estudiantes deberían poner en juego los conocimientos relacionados con distancia entre dos puntos, foco, vértice, cuerda focal que son necesarios para la resolución del problema plantado. Sin embargo, al grupo que se le aplico la prueba se obtuvo fue una serie de conceptos que si en si tienen que ver con el objeto matemático, no contribuyen con la situación planteada.

Algunas de las soluciones propuestas por los estudiantes se encuentran consignadas en la siguiente tabla:

ESTUDIANTES	SITUACION PROBLEMA
1	NR
2	
3	NR
4	Altura, recorrido, distancia, velocidad
5	Movimiento, trayectoria, lanzamiento de proyectiles vectores, magnitudes dirección
6	NR
7	NR
8	
9	NR

10	NR	
11	NR	
12	NR	
13	Lanzamiento de proyectiles	
14	Movimiento en forma de curva	
15		
16	NR	
17	NR	

Si bien muchos de estos conceptos se aplican en física y tienen relación con el objeto matemático poco contribuyen en la resolución matemática de la situación planteada en el ítem uno de la prueba diagnóstica. Los estudiantes que resolvieron este punto en su mayoría no tomaron en cuenta los elementos que les servían para resolver la situación y se limitaron a definir algunos conceptos relacionados que pueden definirse como objetos personales

Otro aspecto analizado en la prueba diagnóstica que se tomó como énfasis desde la Guía de Reconocimiento de objetos y significados (GROS), esta los elementos lingüísticos relacionados con el objeto matemático a tratar. En este sentido se plantearon las siguientes preguntas:

¿Qué representaciones están relacionadas con la parábola?

¿Qué expresiones matemáticas identifican o se relacionan con la parábola?

Cuando se habla de un elemento lingüístico en matemáticas nos referimos a una serie de formas de comunicación de las matemáticas que la hacen particular y la identifican de otras disciplinas. Dentro de los estados epistémicos se reconoce uno lingüístico, que tiene que ver con notaciones, representaciones, gráficos y conceptos relacionados con un objeto matemático en particular (Maenza, 2009), es por ello que dentro de las preguntas anteriores, se pretende que los estudiantes dibujen o escriban sobre el objeto en cuestión. A continuación se muestran algunas de las repuestas de los estudiantes a estas preguntas.

ELEMENTOS LINGUISTICOS
Figuras geométricas, plano cartesiano movimientos, razones trigonométricas
Plano cartesiano figura del movimiento
X, y
Figuras geométricas, plano cartesiano movimientos, razones trigonométricas
Gráficamente en el plano cartesiano

Representar en cualquier parte Plano cartesiano
Debe tener simetría

Dentro de las respuestas que dieron algunos de los estudiantes, pues otros no contestaron el cuestionario, existe una serie respuestas relacionadas con el plano cartesiano, funciones trigonométricas o las coordenadas del plano. Aunque algunos de los elementos hacen parte del reconocimiento de la parábola como objeto matemático, no son el eje central que permita reconocer que los estudiantes reconozcan los elementos fundamentales del objeto matemático de estudio.

Un tercer aspecto a tener en cuenta en la prueba diagnóstica es el relacionado con los conceptos. Estos son representaciones mentales de los objetos y se pueden representar mediante una definición formal (Turégano, 2006). Dentro de las preguntas realizadas al os estudiantes y que guardan relación con esta parte de la GROS están

¿Cuál es el concepto formal que define una parábola?

Escribe un concepto que menos formal de la parábola

En esta parte del desarrollo de la GROS se hace necesario identificar los objetos personales y los conceptos que tienen los estudiantes sobre la parábola. En primer medida lo que se pretende es que los estudiantes elaboren un concepto matemático sobre la parábola como objeto matemático de estudio y en el segundo que los estudiantes realicen una definición un poco más trivial con relación al mismo objeto. Este concepto de trivialidad se refiere en especial a aquellos que se establecen de los conocimientos previos que tienen los estudiantes y que se conoce como zona de desarrollo potencial (Moll, 2005)

Cuando se aborda a los estudiantes frente a estas cuestiones algunas de ellos no respondieron. Sin embargo, aquí tenemos las respuestas de aquellos que escribieron algo al respecto:

Conceptos de los estudiantes de la parabola desde la Guia de reconocimiento de objetos y significados

CONCEPTOS
NR
Movimientos por los cuales se hacen figuras y se pueden resolver graficas
Caída de cuerpos con condición especial
Forma parabólica

En esta parte de la aplicación de la GROS solo se tuvieron tres conceptos. En ellos se observa como los estudiantes relacionan el objeto matemático con figuras, graficas, caída de cuerpos con condición especial, que si bien es cierto, no deja claro esa condición. En este sentido se puede decir que es un concepto menos formal de la parábola aunque ambiguo, porque no resuelve el tema de la condición de este como símbolos y definiciones formales.

En el cuarto punto de la prueba diagnóstica relacionada con la GROS se encuentran los procedimientos. En este sentido los procedimientos están relacionados con la forma que los estudiantes realizan ciertas actividades de tipo matemático donde requieren el uso de algunos procesos matemáticos. En este sentido se pone en juego ciertas habilidades en cuanto a la resolución de operaciones y situaciones de tipo algebraico que pueden desencadenar en reconocer los elementos que están relacionados matemáticamente con la parábola y resolver la situación que se presenta en un caso particular. En este sentido la figura representada tenía tres puntos con los cuales aplicando el principio de distancia entre dos puntos se le pueda dar solución a la ecuación canónica y luego utilizar el concepto de las ecuaciones para hallar la ecuación general de esta.

En la guía a los estudiantes se les propuso la siguiente actividad "Hallar *la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto de coordenadas (3,5) y su foco es el punto (3,4), realiza también la gráfica". Tomado de practicando de con la parábola juan Adolfo Álvarez Martínez.*

En esta actividad el eje central estaba, como ya lo habíamos explicado en la relación de la distancia entre dos puntos. Con estos elementos se puede construir ambas ecuaciones relacionadas con el objeto matemático en cuestión.

Frente a los procedimientos ninguno de los estudiantes contesto o resolvió el procedimiento que se le había propuesto en la actividad o en alguno de los casos no tenían los elementos para resolverlo. En este sentido se encuentra un obstáculo que puede ser de tipo epistemológico.

Finalmente dentro de la GROS, se les pregunto a los estudiantes por algunas de las propiedades que identifican la parábola y que no habían sido abordadas en el cuestionario. En este sentido las preguntas estaban relacionadas con las características de la parábola cuando está en el origen de plano cartesiano y su significado cuando no se encuentra en el origen. Así las preguntas planteadas para este caso fueron:

¿Qué significado tiene el hecho de que la parábola tenga su vértice en el origen?

¿Qué significado tiene que la parábola tenga su vértice en (h,k)?

Ante estas preguntas los estudiantes deberían de tener claro varios aspectos que guardan relación con el objeto matemático de estudio. Así el concepto de vértice de la parábola es fundamental y el termino origen. Este último concepto tiene mucho que ver con el plano cartesiano. Además en los libros de texto del bachillerato aparece muy frecuentemente el concepto de h,k para designar un punto en cualquier parte del plano cartesiano. Sin embargo cuando los estudiantes abordan este concepto se hace necesario establecer qué tipo de puntos del plano cartesiano corresponden a estas letras y desde allí obtener los elementos de los identifican. En la prueba aplicada a los estudiantes se nota que estos conceptos no se encuentran en los aprendizajes.

Conclusiones:

La actividad matemática requiere de algunos elementos descritos frente al análisis de la prueba diagnóstica desde la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS), desde la emergencia de estos objetos en el primer nivel (Godino C. B., 2001), en ello ese reconoce que se hace necesario poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si bien los estudiantes que participaron de la prueba presentaban algunos conocimientos sobre el plano cartesiano, coordenadas, imágenes, conceptos y procedimientos relacionados con el objeto matemático que llevan a los estudiantes a una argumentación sobre el mismo. Pero se hace difícil tener una argumentación de un objeto matemático cuando solo se tienen algunos elementos de carácter personal alrededor del objeto a tratar.

El EOS al proponer estos objetos personales primarios (Godino C. B., 2001) se refiere en representar las entidades que componen el aprendizaje de un objeto matemático por parte de los sujetos que interactúan con él, por medio de unos elementos mediadores que lo faciliten.

Así las tipologías de objetos primarios se resumen en:

- Elementos lingüísticos (términos, expresiones, notaciones, gráficos,) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual,)
- Situaciones – problemas (aplicaciones extra-matemáticas, tareas, ejercicios)
- Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,)
- Proposiciones (enunciados sobre conceptos, entre otros todos ellos relacionados con la parábola.)
- Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,)
- Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo,).

Todas estas ideas organizadas corresponden a un compendio de aspectos que en el aprendizaje de un objeto matemático desde la EOS. En este sentido, se hace necesario establecer relaciones dentro de la enseñanza que contribuyan con el fortalecimiento de los significados personales que tienen los estudiantes sobre el objeto matemático desde la resolución de problemas, las proposiciones, los conceptos, procedimientos y argumentos y así fortalecer el aprendizaje.

CAPITULO CINCO CONSTRUCCION DE INSTRUMENTOS DE APRENDIZAJE PARA LOS ESTUDIANTES

INTRODUCCIÓN

Para llevar a cabo el proceso de selección de textos que puedan contribuir con una unidad didáctica que corresponda a las idoneidades epistémica, cognitiva e interaccional de una idoneidad didáctica, se tomó como referente el análisis cualitativo de los contenidos presentes en estas secuencias. Para iniciar se hizo la lectura de varios documentos con los cuales se reconocieron diversas mediaciones que se pueden llevar a cabo para superar los niveles de significación propuestos en la EOS. Además se tuvo en cuenta la forma como estaban diseñados los instrumentos para aplicar a los estudiantes. Así, los instrumentos a aplicar deben tener en cuenta: los conocimientos que tienen los estudiantes, la forma como pueden asumir los símbolos, la relación del objeto matemático con el contexto.

Para evaluar las actividades para los estudiantes se toma como referente el análisis de contenido con el fin de reconocer las posibles idoneidades que pueden llevar a los estudiantes a otros niveles de aprendizaje y cognición matemáticos presentados en el EOS. En primer lugar el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática propone como primer nivel la configuración de los objetos emergentes de las prácticas educativas. Este nivel es más personal y está muy relacionado dentro de las teorías de la construcción del conocimiento como la zona de desarrollo potencial. En esta parte de la cognición se reconocen símbolos, lenguajes, conceptos, proposiciones entre otros elementos que sirven para el reconocimiento de los objetos y el desarrollo del aprendizaje.

En un segundo nivel se destaca los atributos contextuales que resalta en lo que es la noción de los atributos que tienen los objetos matemáticos y la significación que alrededor de ellos se puedan dar. De allí se desprenden una serie de configuraciones duales consideradas como facetas o dimensiones y que se pueden obtener en las prácticas sociales que respecto de los objetos matemáticos pueden darse en procesos de enseñanza aprendizaje.

Finalmente, aparece el nivel donde los estudiantes utilizan de forma general el conocimiento. Para esto el EOS toma como referentes algunos procesos de otros autores para el reconocimiento de los objetos en niveles superiores del conocimiento como son la reificación, la materialización, interiorización, generalización entre otros procesos de cognición y meta cognición (Godino, 1994). Este proceso es conocido como normas y meta normas.

Para analizar los documentos se toma en cuenta la idoneidad didáctica. Desde este se toman algunos referentes y se construyen otros que pueden influir en el proceso de planeación de la unidad didáctica para estudiantes con el fin de puedan superar el punto en el cual se encontraban en la prueba diagnóstica analizada en la parte anterior. Finalmente se aplican los indicadores construidos con el fin de valorar el nivel que desde el EOS pueden alcanzar los estudiantes por medio de mediaciones y actividades que les ayuden a fortalecer el conocimiento sobre la parábola. Esta actividad se hace con dos fines principales: evaluar la pertinencia de la secuencia didáctica aplicada a los estudiantes y por otra parte verificar si con ella los estudiantes pueden superar el nivel en el cual se encontraban en la prueba diagnóstica.

FASE UNO: ANÁLISIS DE LOS CONTENIDOS A APLICAR A LOS ESTUDIANTES DE GRADO DECIMO DE LA INSTITUCIÓN EDUCATIVA INSTITUTO MISTRATÓ.

Introducción

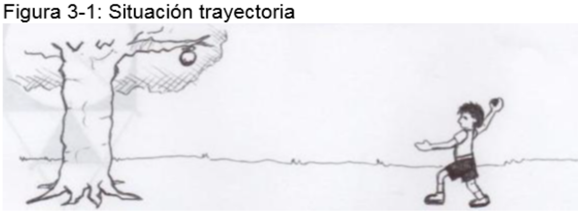
Para realizar el análisis de los instrumentos aplicados a los estudiantes utilizaremos la Guía de Reconocimiento de objetos y significados. Para realizarlo, se tendrá en cuenta la correspondencia de cada elemento de la GROS con los significados que se pueden extraer de los objetos analizados. Por lo extenso del trabajo realizado con los estudiantes se hará un análisis de los elementos fundamentales de los objetos matemáticos. Desde el EOS, los objetos matemáticos giran en torno a las situaciones problemas, elementos lingüísticos, conceptos, definiciones propiedades, procedimientos y argumentos. En este sentido, se pretende evaluar los significados que hay alrededor de cada tarea propuesta para los estudiantes.

Al realizar este análisis es posible identificar los posibles conflictos que se pueden presentar en la aplicación de las tareas. Aunque este no es el centro del trabajo, es necesario reflexionar sobre los obstáculos que pueden presentar los estudiantes en el momento de realizar las tareas. A continuación haremos el análisis de las tareas aplicadas a los estudiantes durante el proceso de investigación. Este será de carácter cualitativo y se enfocara en los objetos y los significados. Para realizarlo, enumeraremos las tareas y haremos el respectivo análisis de cada uno de los elementos que la componen.

Tarea 1

1. Un niño toma una piedra y la arroja tratando de impactar una fruta que se encuentra en una rama alta de un árbol. Se sabe que no la lanzó lo suficientemente fuerte como para conseguir su objetivo.

Figura 3-1: Situación trayectoria



Dibujar la trayectoria que describe la piedra desde que parte de la mano del niño hasta que cae al piso.

b. ¿Puede compararse con la trayectoria que describe un balón de baloncesto cuando es lanzado hacia la canasta? Responda: Si__ No__ ¿Por qué?

c. ¿Qué nombre le daría usted a la trayectoria descrita por la piedra arrojada por el niño?

Tabla 9. Análisis de significados según la guía de reconocimiento de objetos y significados tarea 1.

ELEMENTOS LINGUISTICOS (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones graficas)	SIGNIFICADOS Papel desempeñado por los objetos o a lo que se refiere cada objeto (función semiótica)
Trayectoria	Dibujar el camino que recorre la piedra
Lanzamiento	Este debe sr de tal forma que no alcance el fruto
CONCEPTOS/ DEFINICIONES Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal	SIGNIFICADOS
Trayectoria	La ruta que sigue el objeto la ser lanzado
Lanzamiento	Forma como se debe lanzar la piedra
Caída	Camino que describe el objeto cuando alcanza la altura máxima
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una definición o prueba)	SIGNIFICADOS
Lanzamiento oblicuo	Lanzamiento parabólico

Caída de los cuerpos	Caída libre
PROCEDIMIENTOS Técnicas, operaciones, algoritmos	SIGNIFICADOS
Lanzamiento de la piedra	Este lanzamiento se debe registrar de tal forma que no alcance a llegar donde está la fruta que tiene que alcanzar
Descripción del movimiento	Forma como el estudiante debe dibujar este movimiento
ARGUMENTOS Justificaciones o pruebas de las propiedades/proposiciones utilizadas.	SIGNIFICADOS
Lanzamiento parabólico	Forma como queda dibujado este movimiento al realizar la tarea.
Trayectoria	Recorrido que describe el objeto cuando es lanzado y que debe ser dibujado por el estudiante así le da respuesta a las preguntas propuestas.

Fuente: Godino 2001

Conflictos potenciales

Los estudiantes no reconocen el enunciado de la tarea y presenta complicaciones a la hora de realizar la gráfica.

Dificultad para reconocer el tipo de movimiento presente en la trayectoria de la piedra que ha sido lanzada por el estudiante.

Tarea 2

2. En equipos de trabajo de 4 estudiantes, construir en plastilina 4 conos como los mostrados a continuación:
Figura 3-2: Ilustración sobre cono y cortes realizados en él.

Ahora, con un bisturí realizar un corte al primer cono de tal forma que el corte sea paralelo a la base. Al segundo cono realizar un corte paralelo a una de las líneas que confluyen en la punta. Al tercer cono realizar un corte oblicuo pero sin que llegue a cortar la base de este. Al último cono, realizar un corte de tal forma que el corte sea perpendicular a la base del cono. Ahora individualmente completar los numerales a y b:

a. Dibujar a continuación el contorno (borde) de los cortes realizados:

b. A las figuras obtenidas en los cortes realizados, asígnales un nombre adecuado:

3. Una vez ubicados en la sala de computadores y conformando parejas, abrir el programa GEOGEBRA.

Con la ayuda del profesor, trazarán las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas:
I. $f(x) = x^2$
II. $f(x) = 2x^2+3$
III. $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
IV. $f(x) = 5x^2-1$
V. $f(x) = -0.5x^2- 2x +4$
VI. $f(x) = x^2- x$

A. ¿En qué se parecen las gráficas de las funciones anteriores?

B. La funciones utilizadas son de la forma: y= ax2+bx+c. El valor de a puede ser positivo o negativo, NUNCA nulo.
a. ¿Qué sucede con la gráfica cuando a es positivo?

Mediación

¿Qué sucede con la gráfica cuando a es negativo?

Tabla 10. Análisis según la GROS. Tarea 2.

ELEMENTOS LINGUISTICOS (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones graficas)	SIGNIFICADOS Papel desempeñado por los objetos o a lo que se refiere cada objeto (función semiótica)
Elaboración de conos en plastilina	Representación de los objetos matemáticos a tratar
Corte de los conos siguiendo instrucciones	Expresa cada corte y establece diferencia entre ellos como acercamiento a las secciones que se pueden derivar de un cono de revolución
$F(x)=x^2$	La función de x está relacionada con el cuadrado de la misma. Representa una parábola que abre hacia arriba
$F(x)= x^2 +3$	La función de x está relacionada con la misma más la variable independiente que determina el corte en y. es decir, el vértice de la parábola es 0,3
$F(x)=-2x^2+x+1$	La función de x está dada por el doble del cuadrado de x más el valor de x más la variable independiente
$F(x)=0.5x^2-2x+4$	La función de x está dada por la mitad del cuadrado menos dos veces el valor de x más la variable independiente, en este caso es el cuatro
CONCEPTOS/ DEFINICIONES Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal	SIGNIFICADOS
Corte paralelo	Corte que se hace en el mismo sentido de la forma del cono. En este caso un corte en el mismo sentido de la base del cono.
Corte oblicuo	Corte que se hace diagonal al cono sin llegar hasta la base del mismo
Corte perpendicular	Corte que se hace totalmente contrario a la base del cono
Cono	Figura tridimensional cuya base es circular
Función cuadrática	La función cuadrática es aquella donde la variable independiente tiene cono exponente 2
Positivo, negativo, nulo	Valores que puede tomar la función. La pregunta es si este valor puede ser cero(nulo)
PROPIEDADES	SIGNIFICADOS

(Enunciados para los cuales se requiere una definición o prueba)	
Que sucede cuando a es positivo	Se debe reconocer en la función claramente el valor de a, b y c. después se debe determinar qué pasa cuando el valor de a es positivo. Esto se puede establecer con la gráfica de las funciones para identificar esta propiedad
Que sucede cuando a es negativo	Esta relación se reconoce con la gráfica de una función en la que a tiene un valor negativo. En este caso es posible hablar de la propiedad estableciendo nexos con la primera
Concepto de nulo	Cuando el valor de a es cero la función es nula. Es decir que no es una función cuadrática.
PROCEDIMIENTOS Técnicas, operaciones, algoritmos	SIGNIFICADOS
Realizar los cortes	Se tiene que definir claramente qué tipo de corte se debe realizar. Es decir si este es paralelo a la base, oblicuo a esta o perpendicular. De cualquier forma se debe entender que la base es la referencia para hacer dichos cortes.
Darles el nombre	Nombrar los cortes es un proceso que le permite al estudiante reconocer la diferencia entre cada uno de estos que fueron realizados. Nombrarlos consiste en darles sentido para diferenciarlos
Realizar las graficas	Esta actividad consiste en utilizar el geogebra para realizar y analizar las gráficas de funciones cuadráticas.
ARGUMENTOS Justificaciones o pruebas de las propiedades/proposiciones utilizadas.	SIGNIFICADOS
Que es una parábola	Definición menos formal de concepto del objeto matemático en cuestión.
De donde se obtiene una parábola	Justificar que tipo de ecuaciones dan origen a la figura en forma de parábola

Fuente: Godino 2001

Los estudiantes no están familiarizados con el uso de geogebra lo que dificulta la elaboración de las gráficas en cada caso.

Los estudiantes no comprenden el concepto de parábola que abre hacia arriba y hacia abajo

Algunos estudiantes tienen dificultad con la terminología usada para realizar el trabajo del cono.

Existen problemas en el reconocimiento de los elementos de la parábola como el vértice. Además, la clasificación de las secciones cónicas.

Tarea 3

Mediación

¿Qué sucede con la gráfica cuando a es negativo?
b. Determine algebraicamente el vértice de las funciones I, II y III. Luego compare este resultado con el valor que se presenta en las gráficas.

C. Tomando como referente la gráfica I, diga cuál es el eje de simetría de cada gráfica.

D. Si se toman dos puntos de la gráfica que estén a la misma distancia del eje X (o sea que tengan el mismo valor en Y), ¿cómo es la distancia de esos puntos con respecto al eje de simetría? Explique.

Tabla 11. Análisis de significados según la GROS. Tarea 3

ELEMENTOS LINGUISTICOS (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones graficas)	SIGNIFICADOS Papel desempeñado por los objetos o a lo que se refiere cada objeto (función semiótica)
Graficas	Representación de una función.
Simetría	Relación de la función con respecto a uno de los ejes de las coordenadas del plana cartesiano
Distancia	relación métrica entre dos puntos de referencia
CONCEPTOS/ DEFINICIONES Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal	SIGNIFICADOS
Cuando el valor es positivo la gráfica abre hacia arriba	Tipo de grafica que presenta una característica especial de acuerdo a la función dada. Normalmente se trata de

	funciones positivas.
La parábola guarda relación de simetría en con respecto al eje	Es necesario reconocer el eje en el cual se encuentra el vértice y el foco de la parábola para determinar la simetría de esta.
El eje de la parábola es en el cual se encuentra el vértice y el foco	Este es normalmente para la parábola como función es el eje y. mientras que para la parábola como lugar geométrico depende del tipo de ecuación.
El vértice de la parábola es el origen de esta	En este caso puede ocurrir que la parábola tenga el vértice en el origen del plano cartesiano (0,0), en uno de los ejes (0,k) y (h,0) y en cualquier parte del plano cartesiano (h,k)
Cuando el valor de la función es negativo la parábola abre hacia abajo	Es la dirección que puede tener la gráfica cuando el valor de la función es negativa. En este caso, la parábola abre hacia abajo. Este concepto se puede utilizar para hallar el punto máximo en una función cuadrática
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una definición o prueba)	SIGNIFICADOS
Cuando el valor de a es positivo la gráfica abre hacia arriba	En una función cuadrática el valor positivo de a representa la gráfica que abre hacia arriba
Cuando el valor de a es negativo la gráfica abre hacia abajo	El valor negativo de a representa una gráfica que abre hacia abajo.
El eje de simetría y el vértice varían de acuerdo a los valores de a, b y c	La grafica con centro en el origen representa una parábola $y=x^2$. En otros casos la función está dada por la función completa $f(x)= ax^2+-bx+-c$
PROCEDIMIENTOS Técnicas, operaciones, algoritmos	SIGNIFICADOS
Elaboración de las graficas	Con ayuda de geogebra los estudiantes hacen las graficas
Análisis de las graficas	Los estudiantes deben mirar hacia donde abren las gráficas, hacia arriba, hacia abajo y el eje de simetría y el vértice.
ARGUMENTOS Justificaciones o pruebas de las propiedades/proposiciones utilizadas.	SIGNIFICADOS
Aplicación de la propiedad 1	Reconocer que cuando el valor de a es positivo la gráfica abre hacia arriba y justificar la respuesta

Aplicación de la propiedad 2	Reconocer que cuando el valor de a es negativo la parábola abre hacia abajo y justificar la respuesta
Aplicación de la propiedad 3	Reconocer que cuando la parábola tiene valores en bx y diferentes de 0 cambia el vértice en el plano cartesiano y justificar la respuesta.

Fuente: Godino 2001

Conflictos potenciales

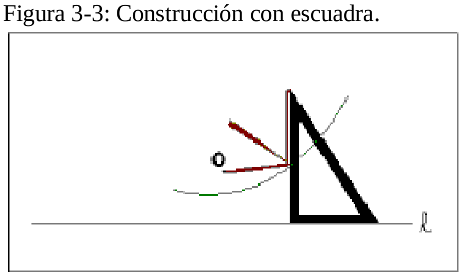
Aplicación de la propiedad 1. En este sentido algunos estudiantes no reconocen el valor

de a

Tarea 4

Construcciones de la Parábola
El siguiente paso es crear situaciones que en un nivel introductorio preparen el terreno para la enseñanza del nuevo conocimiento, dichas situaciones conducirán a que el estudiante realice modelos mentales sobre el tema en cuestión. Para la actividad se ha dividido todo el grupo en 4 equipos, a cada equipo se le ha entregado las indicaciones para realizar una construcción de la parábola (cada equipo una construcción distinta) y unas preguntas que tienen como objetivo que los estudiantes infieran la definición de parábola y algunas de sus propiedades. A continuación se muestran las construcciones planteadas:

Construcción Nº1:
Materiales:
Escuadra.
Hoja de block.
Cuerda de lana.
Lápiz.
Procedimiento:
Ubicar la hoja de block de forma horizontal, luego trazar una línea l paralela a 3cm del borde inferior. Designar un punto O en la hoja de modo que esté a 5 cm de la línea l y que esté centrada respecto a los bordes laterales. Cortar la cuerda de tal modo que su longitud sea igual a la longitud del cateto mayor de la escuadra.
Situar la escuadra de modo que su cateto menor este sobre la línea l, poner uno de los extremos de la cuerda en el vértice correspondiente al ángulo no recto y que no está sobre la línea, y el otro extremo en el punto O. Mantener el lápiz tensionando la cuerda sobre el cateto mayor. Guiarse por la figura 3-3:
Figura 3-3: Construcción con escuadra.



Deslizar la regla en forma paralela a la recta l, manteniendo la cuerda tensionada. Preguntas: Describir la gráfica que se obtiene:
____
____

¿A qué sección cónica se asemeja la figura obtenida?____________________________

Sobre la gráfica obtenida ubicar un punto A ¿Qué relación existe entre la distancia del punto O al A y de la recta l al punto A?____ __________________

¿Qué otras propiedades se puede observar en la gráfica obtenida? ____

Dar una definición para este tipo de curvas: ____ ____

Tabla 12. Análisis de significados de acuerdo con la Guía. Tarea 4.

ELEMENTOS LINGUISTICOS (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones graficas)	SIGNIFICADOS Papel desempeñado por los objetos o a lo que se refiere cada objeto (función semiótica)
trazar una línea paralela	Se debe entender como una línea que lleva la misma dirección que otra
Designar un punto O en la hoja de modo que esté a 5 cm de la línea l	Medida de longitud
cateto	Lado del triángulo rectángulo adyacente a la hipotenusa
cateto menor	Lado más corto de un triángulo rectángulo adyacente a la hipotenusa
vértice	Cada uno de los puntos donde unen los segmentos de recta
Deslizar la regla en forma paralela a la recta l,	Desplazar la regla en el mismo sentido de una recta dada
CONCEPTOS/ DEFINICIONES Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal	SIGNIFICADOS
Línea paralela	Línea que tiene la misma dirección que otra
Cateto es el lado de un triangulo	Los lados de un triángulo rectángulo son los catetos y la hipotenusa
El vértice de la escuadra	Cada uno de los lados del triángulo está delimitado por un vértice.
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una definición o prueba)	SIGNIFICADOS
Línea paralela es aquella que tiene la misma dirección que otra	Enunciado que permite la construcción de dos líneas con esa característica
Los catetos son los lados de un triángulo	Enunciado que permite la construcción de

rectángulo que complementan la hipotenusa	un triángulo rectángulo
Los vértices representan cada una de la unión de los segmentos de un figura geométrica plana.	Enunciado que permite reconocer los vértices de la escuadra que se va a utilizar
PROCEDIMIENTOS Técnicas, operaciones, algoritmos	SIGNIFICADOS
Ubicar la hoja de block de forma horizontal	Permite organizar la hoja para iniciar el trabajo
Trazar una línea l paralela a 3cm del borde inferior.	Reconocer el borde de la hoja y una línea paralela a esta
Designar un punto O en la hoja de modo que esté a 5 cm de la línea l y que esté centrada respecto a los bordes laterales.	Definir medida de longitud frente a un punto de la hoja
Cortar la cuerda de tal modo que su longitud sea igual a la longitud del cateto mayor de la escuadra	Realizar la comparación entre la cuerda y el cateto mayor de la escuadra
Deslizar la regla en forma paralela a la recta l, manteniendo la cuerda tensionada	Terminar la actividad para determinar qué tipo de figura se forma
ARGUMENTOS Justificaciones o pruebas de las propiedades/proposiciones utilizadas.	SIGNIFICADOS
Describir la gráfica que se obtiene	Reconocer que grafica se obtiene a partir de la actividad realizada
¿A qué sección cónica se asemeja la figura obtenida?	Comparar la figura obtenida con el trabajo realizado anteriormente y
Sobre la gráfica obtenida ubicar un punto A ¿Qué relación existe entre la distancia del punto O al A y de la recta l al punto A?	Determinar la distancia entre dos puntos
¿Qué otras propiedades se puede observar en la gráfica obtenida?	El estudiante debe verificar que otras propiedades que tienen que ver con la parábola se descubren en esta parte del trabajo.

Fuente: Godino 2001

Conflictos potenciales

Hay una baja comprensión en el concepto del paralelismo y perpendicularidad en el inicio de la construcción

Las líneas elaboradas por los estudiantes no cumplen con las especificaciones dadas

Los estudiantes tienen dificultad para reconocer los lados de la escuadra

Dificultades de lectura o de seguir instrucciones

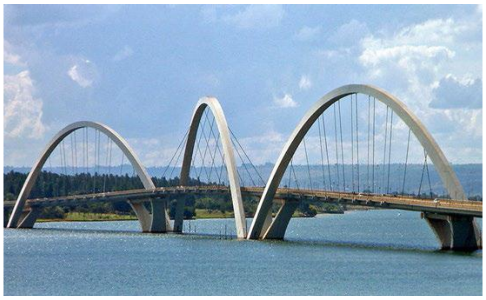
Algunos estudiantes no hacen uso adecuado del material de trabajo en clase.

Distorsión de las instrucciones que se le han indicado en la hoja de trabajo.

Dificultad para realizar la gráfica en cada caso.

Tarea 5

Rebeca y Jasón son dos apasionados por el arte, quieren a futuro estudiar arquitectura. Dentro de una de sus conversaciones, al dirigirse a sus casas, empiezan a hablar de diferentes obras arquitectónicas que consideran hermosas, encontrando que en todas ellas se usa la parábola, o una curva similar a esta, como herramienta para dar belleza a las construcciones y además dar un fin práctico. Entre las obras arquitectónicas que se muestran están estas:



1. **Luego de ver estas imágenes y tener algo de idea de la forma de una parábola, responde.**

a. ¿Qué piensas de estas y su uso?
____
____
____
____
____
____
____
____

b. ¿Conoces algunas construcciones en las que se pueda ver parábolas?

*Tabla 13. Análisis de significados de acuerdo con la Guía. Tarea 5*____

ELEMENTOS LINGUISTICOS (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones graficas)	SIGNIFICADOS Papel desempeñado por los objetos o a lo que se refiere cada objeto (función semiótica)
Graficas	
Imágenes	
CONCEPTOS/ DEFINICIONES Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal	SIGNIFICADOS
Imagen	Que representación se encuentra allí
Parábola	Definir con base en los dibujos que elementos están representados allí
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una definición o prueba)	SIGNIFICADOS
Como están construidas	Que características tienen los objetos representados
Las construcciones presentan una forma especial	Indaga sobre la forma que tiene las figuras mostradas
PROCEDIMIENTOS Técnicas, operaciones, algoritmos	SIGNIFICADOS
Identificar cada uno de los objetos y relacionarlos con el objeto matemático de estudio.	Reconocer los objetos matemáticos en el contexto
ARGUMENTOS Justificaciones o pruebas de las propiedades/proposiciones utilizadas.	SIGNIFICADOS
Luego de ver estas imágenes y tener algo de idea de la forma de una parábola, responde. ¿Qué piensas de estas y su uso?	Los estudiantes pueden entender los objetos matemáticos tratados en contexto con el fin de reconocer su uso. Aunque este no es el único.

Fuente: Godino 2001

Conflictos potenciales

Dificultad para reconocer el tipo de enunciado.

Dificultad en reconocer el tipo de figuras que se encuentran en las imágenes

Tarea 6

Actividad 1: Construcción de la parábola
1. Para la construcción de una parábola necesitaremos.
Compas
Regla
Hoja blanca
Lápiz

... y muchas ganas, ¿ya tienes todo?
Ahora que ya tienes todo empecemos

Paso 1: En el espacio en blanco de la hoja anterior traza una recta con ayuda de tu regla y un punto fuera de ella, a la recta la llamaremos d y al punto externo F.

Paso 2: Traza una perpendicular a d que pase por F, la llamaremos e, al punto de corte entre d y e lo llamaremos C.

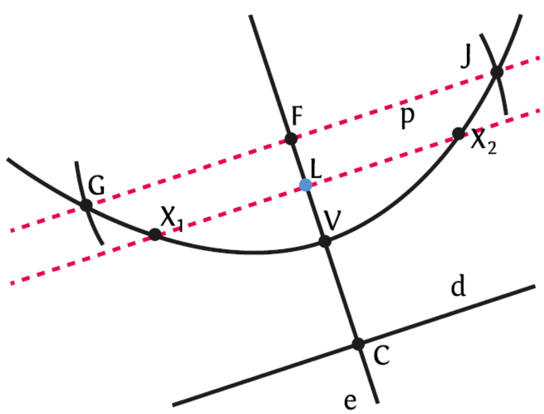
Paso 3: Halla el punto medio del segmento FC, hasta este punto lo Llamaremos V, este es nuestro primero punto de la parábola.

Paso 4: Traza una paralela a d por F y nómbrala p.

Paso 5: Con centro en F y radio FC traza los dos arcos que cortan a la recta p, a los puntos de corte llámalos G y J, los puntos G, J y V harán parte de nuestra parábola, es hora de crear más puntos.

Paso 6: Elije un punto cualquiera (L) en CF, traza por este punto una paralela a d y con centro F y radio CL Traza dos arcos que corten a la paralela que acabas de trazar, a estos dos nuevos puntos márcalos, estos serán dos nuevos puntos de tu parábola.

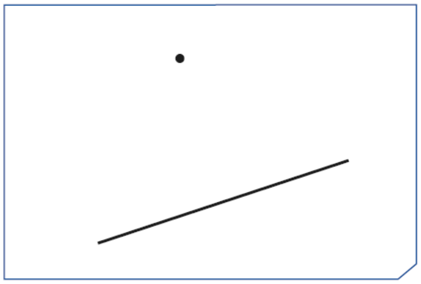
Paso 7: Repite el procedimiento del paso 6 cuantas veces creas necesario, por último une los puntos que hacen parte de tu parábola obteniendo algo parecido a lo que se muestra a continuación.



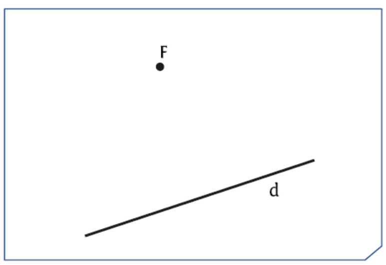
Actividad 2: Identifiquemos sus elementos.

1. Responda las siguientes preguntas teniendo en cuenta lo realizado en la actividad 1.

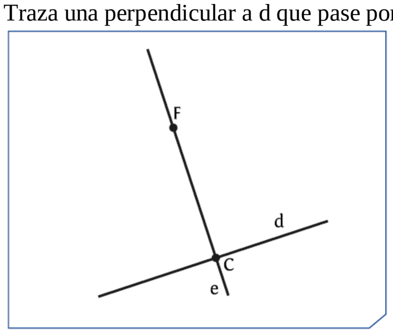
Para responder las siguientes preguntas se te mostrará el paso a paso de la construcción que realizaste en la actividad anterior.
Paso 1
Traza una recta con ayuda de tu regla y un punto fuera de ella.



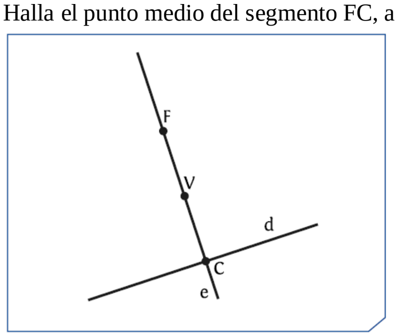
Paso 2
A la recta la llamaremos d y al punto externo F.



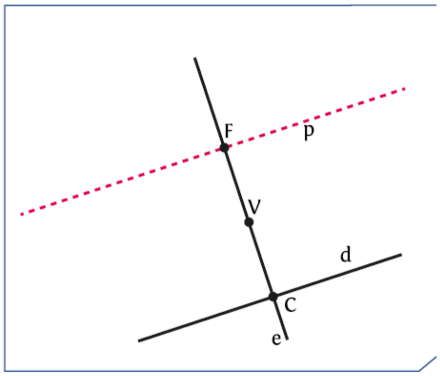
Paso 3
Traza una perpendicular a d que pase por F, la llamaremos e, al punto de corte entre d y e lo llamaremos C.



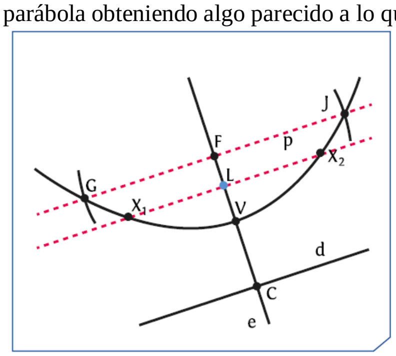
Paso 4
Halla el punto medio del segmento FC, a este punto lo llamaremos V.



Paso 5
Traza una paralela a d por F y nómbrala p.



Paso 6
Con centro en F y radio FC traza los dos arcos que cortan a la recta p, a los puntos de corte llámalos G y J.
Los puntos G, J y V harán parte de nuestra parábola, es hora de, crear más puntos.
Elije un punto cualquiera (L) en DF, traza por este punto una paralela a d y con centro F y radio CL Traza dos arcos que corten a la paralela que acabas de trazar, a estos dos nuevos puntos márcalos, estos serán dos nuevos puntos de tu parábola.
Repite el procedimiento anterior cuantas veces creas necesarias, por último une los puntos que hacen parte de tu parábola obteniendo algo parecido a lo que se muestra. 5



a. ¿Cuál o cuáles elementos dan inicio a la construcción?
____
____
____

a. ¿Qué es una parábola?, para definirla, solo utiliza los elementos que hasta ahora conoces.
____
____
____
____

b. ¿Qué otros elementos, que consideres tienen relevancia, se crearon en la construcción
____
____
____
____

c. ¿Qué medida tiene el segmento delimitado por los puntos G, J en la construcción?
____
____
____
____

Ya conocemos lo siguientes elementos de una parábola: vértice, eje focal o eje simétrico, foco, directriz y lado recto. Además ya sabemos que una parábola se define como todos los puntos que equidistan (tienen la misma distancia) del foco a la directriz.
Es hora de conocer otro tipo de elementos de la parábola.

Tabla 14. Análisis de significados según la Guía. Tarea 6..

ELEMENTOS LINGUISTICOS (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones graficas)	SIGNIFICADOS Papel desempeñado por los objetos o a lo que se refiere cada objeto (función semiótica)
Trazar una recta	Construcción de una figura que es plana e indica una sucesión de puntos
Señalar un punto por fuera de ella	Ubicar un punto fuera de ella es representar un punto por fuera de la línea
Trazar una perpendicular	Esta es una línea que forma un ángulo de 90º con la línea inicial
Hallar el punto medio	Es un punto producto de dividir el segmento.
Señalar con una V	Este indica el vértice
Trazar una paralela	Es una línea paralela a la directriz
CONCEPTOS/ DEFINICIONES Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal	SIGNIFICADOS
Punto	Seña que se debe colocar por fuera de la línea
Recta	Línea infinita de puntos que van en una misma dirección
Paralela	Línea que tiene la misma dirección que otra
Perpendicular	Línea que forma un ángulo de 90º con otra línea la cual corta en un punto
Radio	Es la medida que hay del centro de la circunferencia a cualquiera de sus puntos
Punto medio	Esta dado por la división de la distancia entre dos puntos. Se pueden sumar los dos puntos y dividir entre dos
Segmento	Parte de una recta delimitada por dos puntos
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una definición o prueba)	SIGNIFICADOS
Elementos que dan origen a la	Punto y recta

construcción	
Línea perpendicular	Línea que forma 90º con otra línea en la cual se interseca en un punto
Características de la parábola	Determinar el eje de simetría, la simetría de la parábola y la relación entre la distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz.
Elementos de la parábola	Determinar el foco, la directriz, el eje focal y el vértice de la parábola
PROCEDIMIENTOS Técnicas, operaciones, algoritmos	SIGNIFICADOS
En el espacio en blanco de la hoja anterior traza una recta con ayuda de tu regla y un punto fuera de ella, a la recta la llamaremos d y al punto externo F. Traza una perpendicular a d que pase por F, la llamaremos e, al punto de corte entre d y E lo llamaremos C.	Pasos para realizar la construcción
Halla el punto medio del segmento FC, hasta este punto lo Llamaremos V, este es nuestro primero punto de la parábola	
Traza una paralela a d por F y nómbrala p	
Con centro en F y radio FC traza los dos arcos que cortan a la recta p, a los puntos de corte llámalos G y J, los puntos G, J y V harán parte de nuestra parábola, es hora de crear más puntos.	
Elije un punto cualquiera (L) en CF, traza por este punto una paralela a d y con centro F y radio CL Traza dos arcos que corten a la paralela que acabas de trazar, a estos dos nuevos puntos márcalos, estos serán dos nuevos puntos de tu parábola.	
Repite el procedimiento del paso 6 cuantas veces creas necesario, por último une los puntos que hacen parte de tu parábola obteniendo algo parecido a lo que se muestra a continuación	
ARGUMENTOS Justificaciones o pruebas de las propiedades/proposiciones utilizadas.	SIGNIFICADOS
¿Cuál o cuáles elementos dan inicio a la construcción?	Se debe reconocer la directriz como el elemento que inicia la construcción

¿Qué es una parábola?, para definirla, solo utiliza los elementos que hasta ahora conoces.	Realizar la definición más formal del concepto de parábola
¿Qué otros elementos, que consideres tienen relevancia, se crearon en la construcción?	Identificar los elementos en la construcción de la parábola
¿Qué medida tiene el segmento delimitado por los puntos G, J en la construcción?	Identificar la relación principal de distancia entre dos puntos

Fuente: Godino 2001

Conflictos potenciales

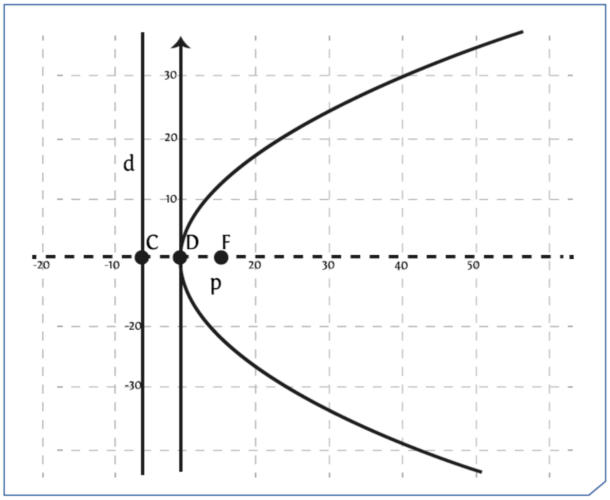
Según (Ruiz, 2013) los estudiantes presentan dificultades para reconocer los elementos que inician con la construcción de la parábola como objeto matemático.

Durante la construcción se evidencio que los estudiantes tenían problemas en el manejo de los instrumentos y las instrucciones dadas en la tarea que se refiere anteriormente. Esto hace que haya una interacción entre docente-dicente para resolver el obstáculo presentado.

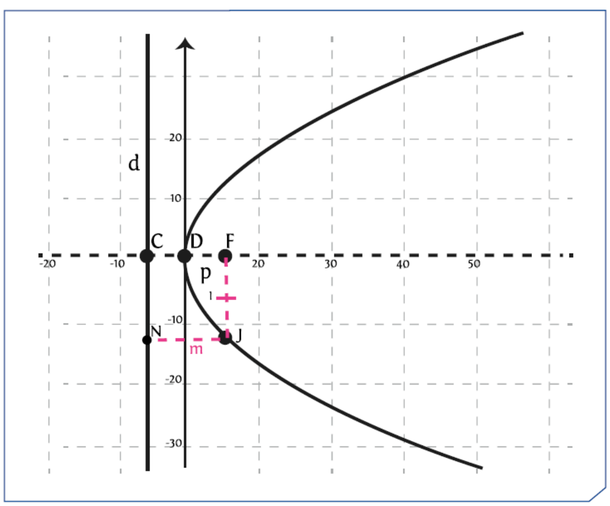
Tarea 7

Actividad 3: Ecuación de la parábola y su gráfica.

1. Observa atentamente la manera en como plantean la ecuación para una parábola con vértice (0,0) y que abre al lado derecho. Llamaremos p a la distancia que hay entre el vértice y el foco, es fácil observar que esta distancia es la misma que hay entre el vértice y la directriz, debido a la definición de parábola.



Con ayuda de la gráfica y lo mencionado anteriormente, obtenemos que:
Directriz se define como x = - p
Foco (p, 0)
Vértice (0,0)
Con estos datos y utilizando la definición de la parábola podremos plantear una ecuación que determine la parábola.7
Se tomará un punto cualquiera de la parábola, al que llamaremos J, este punto tendrá unas coordenadas (x,y) además este punto cumplirá que la distancia de él a la directriz será la misma que la distancia de él al foco.



Tomando la definición de parábola sabemos que: distancia desde la directriz a J = distancia desde J a F de aquí se concluye por teorema de Pitágoras que:

$$\sqrt{(x+p)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2}$$

Con esta nueva ecuación es fácil observar que cuando el vértice de la parábola está en (0,0) y esta abre hacia el lado derecho, nuestra ecuación para determinar la parábola es:

$$4Px = y^2$$

1. Con lo observado y con ayuda de tu profesor soluciona los siguientes puntos.

a. Grafica una parábola cualquiera con vértice (0,0), que abra al lado izquierdo, haz un proceso análogo al observado anteriormente y plantea la ecuación para este tipo de parábolas.

b. Grafica una parábola cualquiera con vértice (0,0), que abra hacia arriba, haz un proceso análogo al observado anteriormente y plantea la ecuación para este tipo de parábolas.

c. Grafica una parábola cualquiera con vértice (0,0), que abra hacia abajo, haz un proceso análogo al observado anteriormente y plantea la ecuación para este tipo de parábolas.

Descripción de la parábola

d. ¿Qué observas de parecido en cada ecuación?, ¿Qué tienen de diferente?
____
____
____
____

e. ¿Qué pasará si traslado el vértice a la coordenada (0,k)?, apóyate graficando una parábola con estas nuevas condiciones en los diferentes casos.
____
____
____
____

f. ¿Qué pasará si traslado el vértice a la coordenada (h,k)?, apóyate graficando una parábola con estas nuevas condiciones en los diferentes casos.
____
____

Tabla 15. Análisis de significados de acuerdo con la Guía. Tarea 7.

ELEMENTOS LINGUISTICOS (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones graficas)	**SIGNIFICADOS** Papel desempeñado por los objetos o a lo que se refiere cada objeto (función semiótica)
Parábola con vértice en (0,0) y que abre al a derecha	Posición de la parábola según ciertas determinaciones y características
X=-p	Relación entre el eje y la directriz
Foco (p,0)	Relación entre un punto del eje x y el eje y donde se encuentra el foco
Vértice (0,0)	Origen de la parábola
CONCEPTOS/ DEFINICIONES Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal	**SIGNIFICADOS**
Directriz	Distancia del vértice a la directriz que es

	igual que aquella del vértice al foco
Vértice	Origen de la parábola donde se reconoce el eje de simetría. El vértice puede ser en una función cuadrática el punto mas bajo o el más alto de la función
Foco	Es un punto de la parábola de igual distancia al vértice como de este a la directriz.
Coordenadas	Puntos del plano cartesiano con relación al eje x y al eje y.
Distancia	Es la relación métrica que se puede encontrar entre dos puntos
h,0	Coordenada del plano cartesiano que corresponde a cualquier punto en el eje x y el origen en y
0,k	Coordenada en la cual x es el origen, mientras y es cualquiera de los valores de este eje.
H,k	Coordenada en la cual los ejes del plano cartesiano se ubican en cualquier lugar de este.
PROPIEDADES (Enunciados para los cuales se requiere una definición o prueba)	SIGNIFICADOS
Este punto tendrá unas coordenadas (x,y) además este punto cumplirá que la distancia de él a la directriz será la misma que la distancia de él al foco.	Enunciado para reconocer la directriz y el foco a partir del vértice de la parábola
La distancia del foco a cualquier punto de la parábola es igual a la distancia de este punto al foco	Enunciado que permite reconocer la distancia entre dos puntos y hallar la ecuación de la parábola
ARGUMENTOS Justificaciones o pruebas de las propiedades/proposiciones utilizadas.	SIGNIFICADOS
Aplicación del concepto de distancia entre dos puntos	Justificar la propiedad 1
Aplicación del concepto de valor positivo y negativo en la parábola	Aplicar este concepto para dibujar otras parábolas y escribir sus ecuaciones
Definición de la parábola con centro en h,k	Encontrar la ecuación de la parábola con centro e h,k siguiendo los elementos de construcción de la parábola

Fuente: Godino 2001

Conflictos potenciales

Dificultad para reconocer la distancia entre dos puntos o desconocimiento de la fórmula para hallar la distancia entre dos puntos.

Baja interpretación de los enunciados para elaborar el tipo de parábola y deducir su ecuación canónica

Dificultad para la comprensión del enunciado

Deficiencias en el reconocimiento de los elementos de la parábola.

Dificultad la reconocer los ejes de la parábola

Desconocimiento de algunos símbolos que indican el vértice de la parábola y el foco

Dificultad para realizar el procedimiento en algunos de los pasos

Dificultad para deducir la ecuación canónica

CONCLUSIÓN

En la enseñanza de la parábola como lugar geométrico es necesario desarrollar otros elementos de esta que no son tenidos en cuenta en este proceso y que toman relevancia cuando se abordan los significados de la misma. Desde la Teoría de las Funciones Semióticas TFS (Godino, 2006), se reconoce como una modelización de los conocimientos personales e institucionales ligados con los objetos matemáticos. Así se permite dar explicación a diversos aspectos en los aspectos centrales del conocimiento y el aprendizaje.

Desde esta condición, el trabajo planteado a los estudiantes se pretendía que ellos accedieran al conocimiento, de tal forma, que este tenga significado en el contexto y se analice cada uno de los elementos. Sin embargo, este análisis epistémico, debe hacerse antes y después de la aplicación de la secuencia a los estudiantes. Así, en la enseñanza y sobre todo en la planeación, se reconocen los elementos que caracterizan la actividad a realizar y así esta se pueda fortalecer y mejorar los conocimientos personales e institucionales. En este sentido se alcanza una mejor idoneidad mediacional en los procesos de instrucción matemática. Esto solo se alcanza cuando desde la planeación se dimensionan los aspectos relevantes por medio de la guía de reconocimiento de objetos y significados donde están configuradas cada una de las tareas realizadas por los estudiantes.

En primera medida las tareas analizadas anteriormente constituyen una herramienta en la cual se puede reconocer el concepto de parábola desde las mediaciones planteadas. Desde ellas, el análisis epistémico que se realiza a cada una de estas tareas nos permite reconocer su idoneidad didáctica para ser presentadas a los estudiantes. En este sentido, la pretensión en mejorar las planeaciones para las clases tiene sentido; ahondar en la configuración de la idoneidad epistémica del mismo a priori mejora significativamente la reflexión sobre lo que se pretende con cada una de las tareas y permite mejorar las demás idoneidades que se configuran en la práctica.

CAPITULO SEIS ANALISIS DE INSTRUMENTOS APLICADOS A LOS ESTUDIANTES DESDE LAS IDONEIDADES EPISTEMICA, COGNITIVA E INTERACCIONAL

Revisando diferentes textos que hablan sobre la parábola como objeto matemático de estudio, se encuentra una gran cantidad de bibliografía sobre el tema. Sin embargo, la selección de dichos temas deben tener como referentes los documentos oficiales (lineamientos curriculares, estándares y derechos básicos de aprendizaje). Además existen documentos de trabajo en investigación y diversos documentos refieren este objeto con elementos diversos que sirven de reflexión para organizar la práctica educativa.

Por un lado, los lineamientos curriculares dan vía libre para la construcción del currículo discriminándolo por pensamientos, de tal forma que se reconocen como pensamiento numérico y sistemas numéricos, el pensamiento geométrico y los sistemas espaciales, el pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y sistemas de datos y el pensamiento aleatorio y sistemas algebraicos y analíticos (MEN, lineamientos curriculares de matematicas, 1998). Para el estudio de la parábola como lugar geométrico nos enfocaremos en el pensamiento geométrico y los sistemas espaciales sin que esto relegue la importancia que tienen los demás pensamientos, los cuales se articulan en sí, con datos, medidas y fórmulas matemáticas. Implica que los pensamientos en matemáticas estén correlacionados. Sin embargo, al analizar el objeto matemático desde los estándares de calidad aparecen los enunciados que lo referencian aparecen solo en el pensamiento geométrico y espacial un enunciado que dice "al terminar el grado undécimo" con las siguientes expresiones:

- *Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.*
- *Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y fi guras cónicas.*
- *Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de fi guras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.*

Como se ve anteriormente, los estudiantes pueden abordar el concepto matemático en el grado decimo o en el grado undécimo. Además, no existe una sola forma de presentar el objeto matemático. Los estándares dan cuenta de diferentes lenguajes, lo que a su vez, configura diversos significados que se pueden dar de este. Así, los significados de la parábola se van dando desde diversos ámbitos semióticos, sin perder el ser del concepto como tal.

Al hacer un análisis de idoneidad didáctica teniendo en cuenta las tres facetas epistémica, cognitiva e interaccional es menester reconocer los elementos e indicadores que se proponen para el estudio del objeto matemático y elaborar algunos criterios y plantear otros necesarios para la construcción de la misma. Además, estos indicadores se deben analizar con los propuestos por Godino (2011) para complementarlo y ajustarlos a las necesidades que se requieren en este caso sin perder la esencia de la propuesta de este autor.

Para iniciar la valoración de los instrumentos aplicados a los estudiantes se realiza un análisis de diferentes tipos de textos desde las facetas que se ha propuesto para mirar que nivel presenta estos en el momento de hacer la intervención de clase y en qué medida pueden contribuir a mejorar los aprendizajes. Es decir, elevar el nivel en el cual se encuentran los estudiantes en la prueba aplicada inicialmente.

Cuando se trata de realizar el análisis de una tarea bajo la perspectiva de la idoneidad didáctica es necesario reconocer que variables de ellas son relevantes en el proceso de aprendizaje para ser incluidas en las instrucciones que se darán a los estudiantes. Esta determinación de las variables en las idoneidades, así como de sus categorías, las instrucciones y secuencias a aplicar depende de las necesidades y pretensiones que se quieran identificar durante la práctica que llamaremos de aprendizaje.

Fase uno: definición de las unidades de análisis

Dentro del trabajo pedagógico propuesto para el proyecto de investigación se analizan las tareas propuestas a los estudiantes en las cuales se hace necesario la reflexión a la luz de los conceptos de cada una de las idoneidades seleccionadas. Así, estas pueden ser llevadas al aula de clase y cumplir con el objeto del aprendizaje.

A lo largo de la unidad de análisis se verán los objetos relacionados con la parábola, siempre haciendo énfasis en el reconocimiento de sus elementos. Todos estos, resultan relevantes dentro del estudio de la geometría analítica, componente del pensamiento espacial y sistemas geométricos; aunque su relevancia no está inscrito en este aspecto de los lineamientos, sino transversalizado con los demás aspectos sobre los que se debe pensar el currículo.

IDONEIDAD EPISTÉMICA

La idoneidad epistémica del EOS de Godino y sus colaboradores (Batanero, Font 2001), compone todos los conocimientos de los objetos institucionales que se han dado a través de un proceso de conocimiento. Para establecer una idoneidad epistémica es necesario reconocer en las prácticas educativas desde el lenguaje, reglas, argumentos y situaciones problema descritos en el EOS.

La enseñanza de la parábola como lugar geométrico ha estado muy ligada a la enseñanza de la geometría desde el siglo pasado, especialmente en los cursos de ingeniería (Hernandez, 1999). Sin embargo la enseñanza de la geometría, ligada a las matemáticas no ha sufrido grandes cambios en el currículo (Gomez, 2014) *en la geometría analítica las cónicas se definían recurriendo a los lugares geométricos y el cálculo estuvo privado de los conjuntos de puntos.* En este sentido la enseñanza de la parábola es un elemento que ha estado muy ligado a la enseñanza de las matemáticas y es un terreno para explorar a partir de la expedición de los lineamientos curriculares (MEN, 1998).

Muchas investigaciones se han dado al respecto pero aplicadas a niveles universitario (Aldana y López, 2013), un estudio sobre la geometría analítica en la educación básica y media (Soto, 2013) y (Garzón, 2013) propuesta didáctica para la enseñanza de las propiedades de la reflexión de las cónicas por medio de la metodología de la resolución de problemas, en ellas se presentan diversas actividades para el reconocimiento y manejo de estas secciones y algunas actividades que se pueden hacer con ellas.

Así, el aprendizaje de la parábola desde el enfoque ontosemiotico es la posibilidad de haces un análisis desde los conocimientos de los estudiantes, los contenidos a aplicar y las reflexiones finales que se pueden encontrar a partir de la aplicación de diversas tareas para ser analizadas por el investigador.

En esta faceta se presenta unidades de análisis de las tareas con respecto a ciertos criterios de análisis descritos por el EOS, otros documentos oficiales y documentos sobre la enseñanza de las matemáticas desde los aspectos ya mencionados.

A continuación presentamos un ejemplo de la idoneidad epistémica propuesto por Godino

Tabla 16. Ejemplo de indicadores de idoneidad didáctica. (Godino 2011)

COMPONENTES	INDICADORES
Situaciones-problemas	Se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación - Se proponen situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguajes	Uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas. - Nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige - Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación
Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen - Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado - Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos

Argumentos	Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen - Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar
Relaciones	Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí. - Se identifican y articulan los diversos significados de los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas

Fuente: Godino 2001

IDONEIDAD COGNITIVA

En el EOS se introduce la noción de significado personal para designar los conocimientos del estudiante. Estos significados son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los "sistemas de prácticas operativas y discursivas" que son capaces de realizar los estudiantes a propósito de cierto tipo de problemas. Los significados personales se van construyendo progresivamente a lo largo del proceso de instrucción, partiendo de unos significados iniciales al comienzo del proceso, y alcanzando unos determinados significados finales (logrados o aprendidos). Hemos definido que una configuración didáctica tiene idoneidad cognitiva cuando el "material de aprendizaje" está en la zona de desarrollo potencial (Vygotsky, 1934) de los alumnos; con otras palabras, que el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales iniciales sea el máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los alumnos y los recursos humanos, materiales y temporales disponibles (Godino, Wilhelmi y Bencomo, 2005). Además se exige que los significados personales logrados por los estudiantes en el proceso de estudio concuerden con los significados pretendidos/

implementados. Esta definición se puede relacionar con la "necesidad de dificultad" descrita por Sfard:

"Puesto que las personas rehúyen la dificultad tratando instintivamente de evitarla, es importante enfatizar que cuando se trata del aprendizaje, la dificultad es de hecho una buena cosa, siempre que sea básicamente manejable. Se puede decir que la dificultad es para el aprendizaje lo que la fricción es para el movimiento: Es la condición necesaria para su existencia. Sin dificultad no hay aprendizaje, de igual modo que no hay movimiento sin fricción" (Sfard, 2002, p. 13). El juicio positivo sobre la idoneidad cognitiva de un proceso de estudio se basará en: a) la existencia de una evaluación inicial de los significados personales de los estudiantes, a fin de comprobar que los significados pretendidos suponen un reto manejable; b) la existencia de adaptaciones curriculares que tengan en cuenta las diferencias individuales15; y, finalmente, c) que los aprendizajes logrados estén lo más próximos posible a los significados institucionales pretendidos/ implementados.

A continuación se presentara una tabla de ejemplo de la idoneidad cognitiva.

Tabla 17. Ejemplo de componentes e indicadores de idoneidad cognitiva.

COMPONENTES	INDICADORES
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio) - Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes

Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo - Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje: Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos, comprensiones y competencias pretendidas: - Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia meta cognitiva - La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia - Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

Dentro de los aspectos a tener en cuenta en el caso del estudio de la parábola se hace énfasis en los aprendizajes, por eso las preguntas elaboradas en las secuencias tiene como fin reconocer los diversos lenguajes, conocimientos, comprensiones argumentos y procedimientos que tienen que ver con el objeto matemático. Así, los estudiantes logran las competencias pretendidas y se logra una alta idoneidad cognitiva, que permita una evaluación y comprensión desde el contexto y uso del objeto matemático en lo concreto y lo abstracto.

IDONEIDAD COGNITIVA DE LAS SECUENCIAS APLICADAS

Para evaluar la idoneidad cognitiva del proceso de instrucción en términos de aprendizaje de los estudiantes, se realizo es necesario hacer un seguimiento detallado estos por medio de secuencias didácticas encuestas escritas y trabajo en equipo, además de las preguntas frecuentes que se hacen a los alumnos. Para reconocer en qué estado se encontraban los estudiantes frente al objeto matemático de estudio (parábola) para conocer sus significados previos y determinar cómo se encuentran en relación con los problemas, lenguaje, propiedades, procedimientos y argumentos aplicados en cada tarea. En tal actividad se hicieron unas preguntas previas, donde de forma sencilla, se relacionaron los objetos en cada una de sus significados. Sin embargo, los estudiantes estuvieron muy por debajo de los conocimientos relacionados con la parábola, pero les genero muchas inquietudes, pues el docente hizo una exposición de objetos que hay en el medio que están relacionados con la parábola. Parece ser un buen inicio para el estudio de este objeto matemático. Con relación a los significados personales previos de los alumnos en las gráficas logran reconocer la trayectoria que siguen los objetos cuando son lanzados de forma oblicua, sin embargo no establecen propiedades y conceptos en ellos. Además, sus definiciones, aunque son válidas, en el contexto de las prácticas relacionadas con el objeto matemático no son relevantes. Así, los estudiantes que llamaremos E1, E2 y E3 tuvieron respuestas muy parecidas relacionadas con artefactos como foco igual a bombillo, vértice con plano cartesiano y directriz en estos tres estudiantes no tuvo definición.

Ya al aplicar las secuencias didácticas estos conceptos se fueron cambiando y aparece unas nuevas definiciones sobre el objeto matemático a tratar. Estas concepciones serán tratadas más adelante y demuestran el avance delos estudiantes en el proceso cognitivo.

IDONEIDAD INTERACCIONAL

La interacción entre los sujetos que intervienen en el proceso de aprendizaje es de doble vía. E primer lugar se encuentra el docente, que organiza una serie de mediaciones o tareas y las coloca en contexto para generar movilización del pensamiento y alcanzar aspectos contribuye a generar significados en los estudiantes y movilizar su pensamiento. Dentro de ellos, la EOS parte de la concepción de lo semiótico y lo ontológico que se pone en juego en las interacciones entre docentes-dicente, discente- objetos matemáticos e una triada que constituye el aprendizaje. Este concepto se desarrolló dentro del trabajo de campo para llevar a cabo esta investigación.

> *Diremos que un proceso de estudio tiene una idoneidad interaccional alta potencial (a priori), efectiva (durante el proceso de instrucción) y residual (a posteriori) y resolver dichos conflictos mediante la negociación de significados. Los formatos de interacción de tipo dialógico y de trabajo cooperativo tendrán potencialmente mayor idoneidad interaccional que las de tipo magistral y de trabajo individual, puesto que los estudiantes muestran su relación con los objetos matemáticos y, por lo tanto, el profesor tiene indicadores explícitos de dicha relación. Estos indicadores pueden permitir al profesor valorar la relación de los estudiantes con los objetos matemáticos y, eventualmente, determinar la intervención más adecuada (según las restricciones matemático-didácticas asociadas a la situación).*

Durante el desarrollo de las actividades propuestas e la secuencia los estudiantes interactúan entre sí mismos y con el docente. En este sentido se fortalecen no solo los vínculos y favorece el aprendizaje. Es la forma más efectiva de favorecer la interacción entre los elementos centrales expuestos en la EOS y que se dan en las prácticas educativas. Para el caso del trabajo sobre la parábola, algunas tareas fueron propuestas en grupos, favoreciendo las habilidades cognitivas de algunos estudiantes, pero también se incluyen los estudiantes que tienen alguna dificultad y es más efectivo, el conocimiento de esta forma

A continuación se presenta un ejemplo de idoneidad interaccional

Tabla 18. Ejemplo de idoneidad interaccional.

COMPONENTES:	INDICADORES:
Interacción docente-discente	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) -Reconoce y resuelve los conflictos de los alumnos (se hacen preguntas y respuestas adecuadas, etc.) -Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento -Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. -Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase
Interacción entre alumnos	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes -Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos matemáticos -Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
Autonomía	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa	Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos

Para efectos del análisis de las tareas que se realizaron, en la secuencia didáctica, se trató de hacer u esquema que recogiera desde la propuesta de idoneidad didáctica de Godino y se adaptara a las condiciones de las tareas y las necesidades de aprendizaje de los estudiantes de grado decimo del Instituto Mistrató. Así, se crearon los siguientes esquemas para el análisis de la idoneidad epistémica, en este sentido presentamos la tabla de propuesta de análisis para el objeto matemático de nuestra investigación.

ANALISIS DE LAS TAREAS DESDE LA IDONEIDAD EPISTEMICA

Tabla 19. Analisis de indicadores de idoneidad epistemica

Adaptado de la propuesta de (Godino, 2011)

COMPONENTES	**INDICADORES**
Situaciones-problemas	Se presenta de forma contextualuzada los objetos matemáticos como la comprension, la ejercitacion y la aplicación de los conceptos relacionadas con la parabola. Generacion de problemas.
Lenguajes	Usos de modo de expresion verbal, graficas y simbolicas de los conceptos relacionados con la parabola. Nivel de lenguaje adecuado para el grupo que tiene que ver con el objeto matematico. Situaciones de expresion matematica relacionadas con el objeto matematico.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definiciones y procedimientos adaptados al nivel de los estudiantes del grado donde se desarrollara la investigacion. Se proponen situaciones de expresion matematica y de interpretacion donde se ponga en juego la zona de desarrollo proximo de los estudiantes.
Argumentos	Las explicaciones son adecuadas al nivel de los estudiantes que participan de las tareas. Se promueven situaciones en la que los estudiantes tienen que argumentar.
Relaciones	Los objetos matematicos(relaciones, definiciones, proposiciones…) se relacionan entre si. Se identifican y articulan los diversos significados relacionados con el objeto matematico de estudio.

Al realizar el análisis de la tarea uno que se presentó a los estudiantes se abordaron los siguientes elementos para su análisis observar la forma como se presenta el objeto matemático a los estudiantes. Para realizarlo se tomó en cuenta la contextualización del mismo. Por ello, las tareas plantadas partían de actitudes donde los estudiantes reconocían con elementos del contexto el objeto matemático. Para llevarlo a cabo, se utiliza una actividad en la que se ponen en juego los aspectos de la EOS.

Situaciones problema

Según (Obando Z. G., 2018) una situación problema es entendida como un contexto de participación colectiva para el aprendizaje, en el que los estudiantes, al interactuar entre ellos mismos, y con el profesor, a través del objeto de conocimiento, dinamizan su actividad matemática, generando procesos conducentes a la construcción de nuevos conocimientos. Los sujetos que están en constante interacción con los objetos matemáticos mediante tareas, logran movilizar los conocimientos y llevar a nuevos aprendizajes.

La primera parte del trabajo fue realizada por grupos donde tenían la posibilidad de discutir confrontar ideas y organizar su trabajo en actividades de comprensión.

Figura 3-1: Situación trayectoria

Dibujar la trayectoria que describe la piedra desde que parte de la mano del niño hasta que cae al piso.

b. ¿Puede compararse con la trayectoria que describe un balón de baloncesto cuando es lanzado hacia la canasta? Responda: Si_X_ No__ ¿Por qué? por que al lanzar el balon tiene una trayectoria de parabola

c. ¿Qué nombre le daría usted a la trayectoria descrita por la piedra arrojada por el niño? Parabola

2. En equipos de trabajo de 4 estudiantes, construir en plastilina 4 conos como los mostrados a continuación:

Este es un ejemplo de cómo abordan los estudiantes este tipo de actividades que constituyen una situación problema en la cual existe un tipo de lenguaje que los caracteriza. Así el lenguaje matemático para este caso es el lenguaje grafico (dibujo). Se puede observar que se encuentran algunas. En este caso, el estudiante hace una representación no muy clara de la tarea propuesta, sin embargo, en las preguntas que se le hacen reconoce el sentido del objeto matemático. Desde el EOS se ha propone dentro de los objetos personales lo gráfico y lo simbólico, así se van configurando, los elementos para una mejor idoneidad cognitiva.

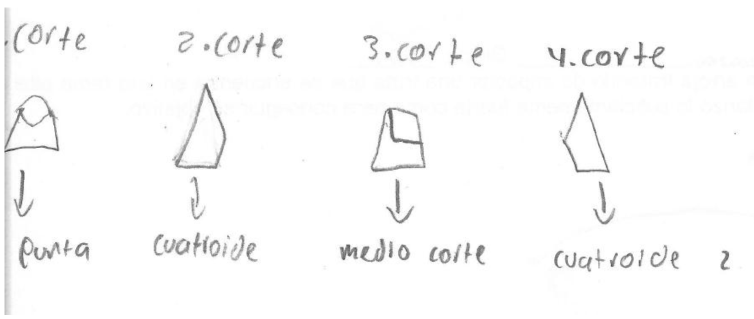
Por otro lado estas tareas generan otras discusiones que les permiten a los estudiantes interacción que favorece la resolución de la tarea planteada generan diversas situaciones a los estudiantes a lo largo de las demás tareas que les permite mejorar los aprendizajes. En este aparte se vio como las tareas cambiaron los conocimientos previos que tenían los estudiantes.

Desde lo epistémico se ponen en cuestión los elementos institucionales que permiten que los estudiantes superen definiciones y conceptos menos formales a unos más formales (Godino, 2011). Estos últimos de carácter institucional, es decir, referidos a los objetos que se han construido a través de la historia y que hacen parte del conocimiento de las instituciones formales que los han organizado.

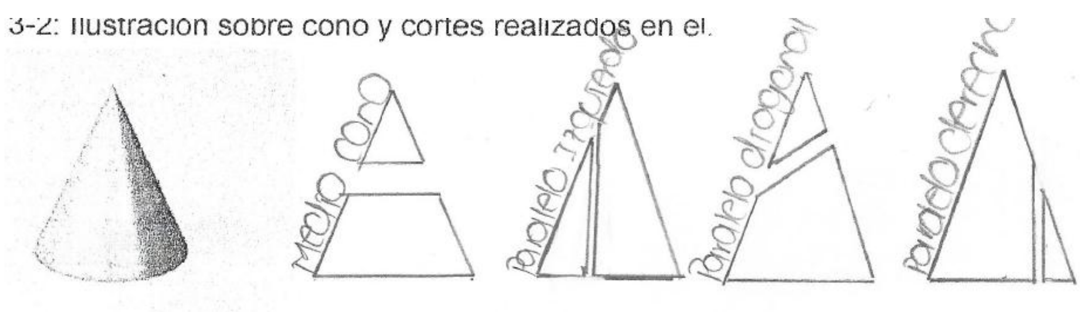
Lenguajes

El lenguaje matemático tiene su esencia especial y en este sentido, el lenguaje de la geometría analítica también lo es. Para ello es necesario, establecer en los procesos de análisis de las tareas los lenguajes usados. En la EOS se los significados en matemáticas pasan por una serie de símbolos, signos y representaciones que hacen particular su lectura. (Godino, 2010) plantea que el problema semántico del lenguaje matemático se incrementa con una serie de registros semióticos utilizados en la actividad matemática. En el lenguaje matemático se configura las representaciones y el significado, a su vez el análisis de los objetos matemáticos está relacionado con sus representaciones. De ahí la importancia de las representaciones y los tipos de lenguaje con los cuales se puede uno dirigir a los estudiantes. En cada una de las taras se trató de iniciar con actividades que involucraran diversas representaciones del objeto matemático.

En el estudio sobre la parábola tomando como referencia el EOS, se pueden evidenciar en la práctica diversos aspectos que tienen que ver con el lenguaje matemático de acuerdo con el objeto que se utilizó en las secuencias trabajadas. Así los estudiantes tuvieron varios registros que podían dar cuenta del objeto matemático y del cual se podía hacer conversión de los registros (Duval, 2001), para obtener diferentes significados en el lenguaje matemático.

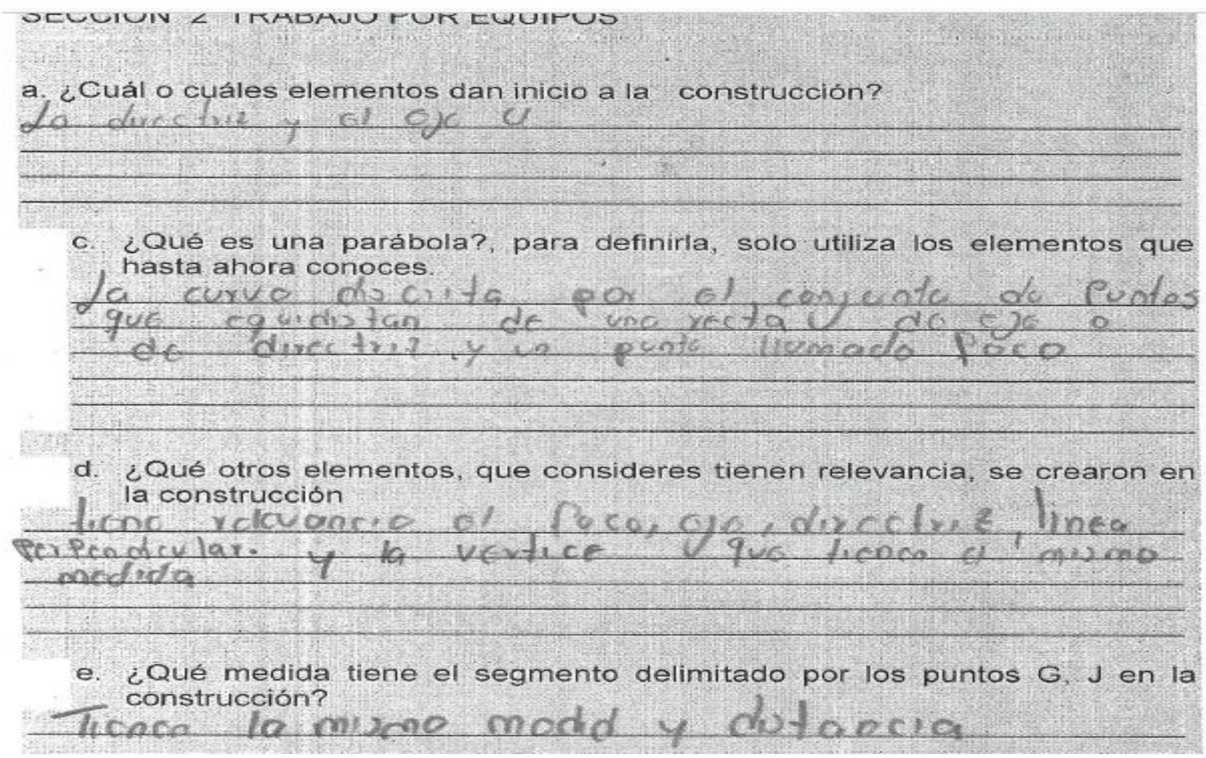


En este caso cuando en la tarea se les pide específicamente a los estudiantes que hagan un cono con plastilina, imaginando que es de revolución y que le hagan a cada uno los cortes mencionados. Estas definiciones de los estudiantes serían las menos formales y normativas, pero permiten identificar todo el proceso de significación y los niveles de aprendizaje propuestos en la EOS.



(Ruiz, 2013) expresa que los estudiantes al realizar los cortes y colocar los nombres de estos los confunden o no dan fe de ellos sino de otras figuras. No es para menos, los estudiantes están en un proceso de dar respuestas a los significados relacionados con la tarea y desde el EOS encuentran las definiciones menos formales para realizarlo. En la actividad realizada en los estudiantes dieron sus conceptos que a la luz de las teorías del aprendizaje son las menos formales (Godino, 2011). Los objetos personales toman su razón de ser cuando los estudiantes, grafican, nombran, dan sus puntos de vista, tratando de significar los objetos matemático en cuestión.

A lo largo de las tareas se ve como los estudiantes van cambiando el concepto del objeto matemático de investigación. Así, se evidencia el aprendizaje, termino de por si polémico pero que se da entre las representaciones matemáticas, el manejo de un lenguaje adecuado y los significados que se dan en todo el proceso.



SECCIÓN 2 TRABAJO POR EQUIPOS

a. ¿Cuál o cuáles elementos dan inicio a la construcción?

La directriz y el eje

c. ¿Qué es una parábola?, para definirla, solo utiliza los elementos que hasta ahora conoces.

La curva descrita por el conjunto de puntos que equidistan de una recta y de eje o de directriz, y un punto llamado foco

d. ¿Qué otros elementos, que consideres tienen relevancia, se crearon en la construcción

tiene relevancia el foco, eje, directriz, linea perpendicular. y la vertice y que tienen el mismo medida

e. ¿Qué medida tiene el segmento delimitado por los puntos G, J en la construcción?

Tienen la mismo medid y distancia

Finalizando las tareas las definiciones de los estudiantes empiezan a ser más formales, estos aprendizajes se alcanzan cuando los estudiantes han tenido la, ya hay argumentación y reconocimiento de algunas propiedades de la parábola. Esto demuestra un avance en las concepciones y los significados si lo comparamos con los conceptos inicialmente enunciados, estos últimos tienen más elementos relacionados con los objetos tratados. (Ruiz, 2013) plantea que los estudiantes presentan dificultades para reconocer los elementos que caracterizan la parábola.

Argumentos

Dentro de los indicadores planteados en el EOS para reconocer los argumentos en una idoneidad epistémica se establece como referente *Las explicaciones son adecuadas al nivel de los estudiantes que participan de las tareas y se promueven situaciones en la que los estudiantes tienen que argumentar.* En ellos claramente se determino como deben ser las intervenciones del docente durante la secuencia y las intervenciones de los estudiantes que no solo definen el conocimiento sino que ademas, permite dentro del aprendizaje de forma holistica. Durante la aplicación de la secuencia, los objetos personales sobre la parabola tomaron una forma mas institucional con definiciones que fueron adquiriendo mayor formalidad. Ademas la interaccion favorece el reconocimiento de los conceptos y propiedades. Algunos de los estudiantes se familiarizaron con las propiedades de la parabola durante el desarrollo de la secuencia didactica.

Un argumento puede cosiderarse como una expresión del lenguaje en su orden superior. Para llegar a el, se tienen que dar ciertas experiencias con los objetos matemáticos que les permitan a los sujetos reconocerlos y transformarlos mediante procesos de acomodación . En términos de Piaget los estudiantes deben haber establecido relaciones con los conceptos que estan aprendiendo desde la experiencia.

Por ello, el objeto matematico debe ser abordado desde todad las concepciones posibles para que los estudiantes logren mayor cotidianidad, lo que los puede llevar a una mejor comprension. (Ruiz, 2013) plantea que hay una separación de los conceptos de parábola desde la concepción geométrica y la concepcion algebraica. En terminos matematicos los estudiantes no establecen comprension entre lo algebraico y lo geometrico cuando se trata del reconocimiento de la parábola. Primero la relacion algebraica de la parabola comienza con la vision de esta como funcion de la forma $f_{(x)}= ax^2+bx+ c$, como se identifica formalmente las ecuaciones de este tipo. (Aldana y Lopez, 2013) citando a Carulla y Gomez afirman que los estudiantes no realizan alnalisis y que aprenden ecuaciones de memoria y se les dificulta relacionar ciertas ecuaciones. En este sentido, aseveran que se reconocen errores que los estudiantes presentan en las situaciones adidacticas.

Relaciones

(Godino, 2011), plantea las relaciones como aquellas conexiones que se pueden dar dentro de los los conceptos y las arguemtaciones que se puedan dar frente a estos. Tambien examinar las propiedades y el lenguaje. En el caso de la parabola las relaciones estan dadas por los lenguajes de tipo algebraico, las conversiones a otros como el grafico, verbal, entre otros. Todas las relaciones deben atender a procedimientos, conceptos y argumentos que se tengan de los objetos matemáticos. En el caso de la parábola, existen relaciones fundamentales y propiedades que la identifican de otros. En este sentido la directriz, el foco, el vertice, la cuerda focal, el eje de la parábola, entre otros son propiedades que la identifican. Además, la comprensión de las relaciones de las medidas entre el foco y un punto de la parábola y de este con la directriz son la base para que desde lo grafico y la notación cartesiana se pueda llegar al concepto algebraico de la misma. Es decir, con estas propiedades y conceptos se realiza una mejor comprension. (Aldana y Lopez, 2013) plantean que con una intervencion didactica se puede lograr el reconocimiento de nociones básicas como ecuaciones de segundo grado, simetrias entre otros en el el estudio de este objeto matemático.

ANALISIS DE TAREAS DE LA IDONEIDAD COGNITIVA.

La idoneidad didactica de la EOS plantea que esta se puede aplicar en diferentes aspectos de la actividad escolar como un estudio puntual de clases,la palaneación de una unidad didáctica o el desarrollo de una propuesta curricular. En el estudio de la parabola como objeto matemático desde el EOS, nos hemos propuesto hacer un analisis de una serie de tareas que permita reconocer la comprensión de este objeto matemático desde la idoneidad cognitiva, epistemica e interaccional. Para ello, los estudiantes con la orientación del docente hicieron una serie de actividades, partiendo de una actividad diagnóstica en la cual se podía dar fé de los apredizajes que tenian los estudiantes hasta ese momento sobre la parabola, no obstante en el plan de area ya se encontraba el estudio de este como funcion de segundo grado para los cursos de noveno y principio de grado decimo, donde se expresan algunas caracteristicas de ella, en los documentos oficiales (estandares, lineamientos curriculares y derechos basicos de aprendizaje) asi:

Los estandares de matemáticas plantean sobre la parábola:

Grados octavo y noveno

- *Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas.*
- *Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.*
- *Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.*
- *Identifico y utilizo diferentes maneras de definir y medir la pendiente de una curva que representa en el plano cartesiano situaciones de variación.*
- *Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.*
- *Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.*
- *Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.*(estándares MEN, 2006)

Estándares básicos de grado decimo y undécimo

- *Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.*
- *Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular delas curvas y fi guras cónicas.*
- *Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de fi guras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.*
- *Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.*

En este caso el lenguaje algebraico y las demás formas de expresión matemática de las ecuaciones toman forma en otros lenguajes especialmente aquellas de segundo grado que gráficamente representan la parábola. Sin embargo, en las discusiones que se dan al respecto se deduce que los estudiantes al salir de la media los estudiantes presentan concepciones equivocadas y errores que son frecuentes (Aldana y López, 2013).

También los derechos básicos de aprendizaje (DBA) presentan frente a las funciones haciendo énfasis en el estudio de la variación de estas con respecto a la utilidad que se puedan dar alrededor de estos (DBA, 2017). También los aspectos relacionados para el conocimiento de la parábola

(Godino J. M., 2013), plantea que dentro de la idoneidad cognitiva, el desfase entre los significados institucionales implementados y los significados personales debe ser al máximo abordable teniendo en cuenta las restricciones cognitivas de los estudiantes entre otros. Para realizar las tareas fue necesario tener en cuenta los elementos planteados por la propuesta de (Godino J. , Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 2011) en los cuales se exponían los principales indicadores de idoneidad cognitiva y aplicarlos al objeto matemático de investigación.

Tabla 20. Análisis de indicadores de idoneidad cognitiva

Adaptado de la propuesta de (Godino, 2011)

COMPONENTES	**INDICADORES**
Conocimientos previos	Los estudiantes tienen la posiblidad de dar las definiciones que tienen sobre el objeto matematico a estudiar. Los contenidos abordados pueden movilizar el pensamiento de los estudiantes
Adaptaciones curriculares	Durante el proceso se manejan los ritmos de aprendizaje individuales Se privilegia el trabajo en equipos
Aprendizaje (Godino J. , Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 2011)	Los diversos modos de evaluacio indican que los estudiantes adquieren los conocimientos y competencias pretendidos. Comprension de los difrentes lenguajes asociados con el objeto matematico (Godino J. , Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 2011) La evaluacion tiene en cuenta los distintos ritmos de aprendizaje y los niveles de comprension de los estudiantes. Además las competenciass que los estudiantes deben desarrollas durante el proceso de aprendizaje. (Godino J. , Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas , 2011)

Fuente: Godino 2001

El análisis de inicia por entender como en procesos de instrucción se presentan tareas que los estudiantes pueden desarrollar de forma individual o grupal y que favorecen el aprendizaje, es decir que garantizan que todos los estudiantes de una u otra forma lleguen al conocimiento del objeto matemático tratado. (Godino J. M., 2013) Plantea la necesidad en este sentido de tener una capacidad para adaptar el significado implementado al pretendido, es decir una transposición didáctica viable. También que exista una didáctica pertinente, es decir que el significado pretendido pueda ser llevado al significado de referencia. El autor puede en este caso hablar del contexto o de la práctica a la cual se pueden llevar los conocimientos. Esto indica que las actividades previas deben ser coherentes con las necesidades de los estudiantes y abrir una serie de posibilidades de exploración de los objetos matemáticos. Para el caso de la investigación que se llevó a cabo, se elaboró una actividad de tipo diagnostico que se aplicó a otro grupo superior en el cual se encontró poco reconocimiento del objeto matemático.

En primer lugar dentro de la práctica los estudiantes pudieron observar algunas aplicaciones de la parábola con figuras que previamente habían sido seleccionadas. Unas de estas tenían que ver con el contexto y otras con figuras que los estudiantes podían identificar. Luego se le aplicó la prueba diagnóstica y finalmente en las secuencias didácticas los estudiantes realizaron una serie de tareas de forma individual y en grupo que les permitió acercarse de forma más esencial a la parábola como objeto matemático de investigación. Las tareas fueron realizadas en forma holística con el fin de que los estudiantes primero tuvieran la posibilidad de interactuar con el contexto y luego se fueran familiarizando con el objeto matemático de estudio. Además se tuvo en cuenta los conocimientos previos.

A continuación se describen algunos elementos de la idoneidad cognitiva aplicada a los estudiantes y las reflexiones que se dan al respecto.

Conocimientos previos

La aplicación previa de una prueba diagnóstica, permitió reconocer en qué estado se encontraban los estudiantes en el momento de abordar el objeto matemático y las líneas que se debían de tomar para obtener una mejor idoneidad cognitiva. En ella se pudo identificar las concepciones que tenían los estudiantes a priori del objeto matemático, de las definiciones, las propiedades, conceptos y argumentos relacionados con la parábola. En estas concepciones incluso, los estudiantes relacionaron algunos elementos de la parábola con elementos que le son conocidos como los bombillos o focos de electricidad

Se destaca al iniciar las secuencias didácticas o tareas programadas para los estudiantes como ellos ya van relacionado el movimiento con el objeto matemático de estudio. Así describieron como realiza el movimiento la piedra. Aunque el estudiante de esta actividad no realizó una buena lectura pues nombra otro objeto que no se encuentra dentro de la tarea asignada pero que nos relevante en el momento de hacer el análisis.

Adaptaciones curriculares

Las tareas planeadas en la secuencia didáctica corresponden a un orden de actividades interrelacionadas y de forma holística. Desde esta perspectiva se facilita la comprensión del objeto matemático. También se presentan gráficos para que haya una mejor posibilidad de reconocer la parábola. Se privilegia el trabajo por equipos y las discusiones globales que permite mejorar la comunicación y los aprendizajes entre los estudiantes y el docente. Es de aclarar que los estudiantes realizaron las tareas de forma individual y por equipos.

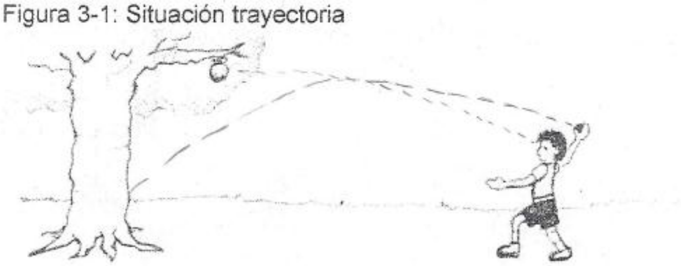
Aprendizajes

En el EOS se determina el aprendizaje dentro de la idoneidad cognitiva como emergente de los objetos personales de los estudiantes. En ese sentido se afirma que para realizar un análisis de los aprendizajes de desde la idoneidad cognitiva, se hace necesario hacer una crono génesis de los aprendizajes de los estudiantes que mostraremos a continuación.

En primer lugar para el trabajo con los estudiantes se utilizaron tareas mediante una secuencia didáctica en la cual estas iban transformando los conceptos de los estudiantes. Partiendo de concepciones a didácticas. Estas trasformaciones de los objetos personales o conceptos que en la EOS se determinan como conceptos menos formales a concepciones más formales se dan mediante una adecuada epistemes de los conocimientos, por medio de las secuencias anteriormente mencionadas, de mediadores y tareas y con la implementación de un trabajo en equipos y discusión en grupos. Otro factor importante que se determina desde la EOS es el uso del contexto como base para la significación.

1. Un niño toma una piedra y la arroja tratando de impactar una fruta que se encuentra en una ram de un árbol. Se sabe que no la lanzó lo suficientemente fuerte como para conseguir su objetivo.

Figura 3-1: Situación trayectoria



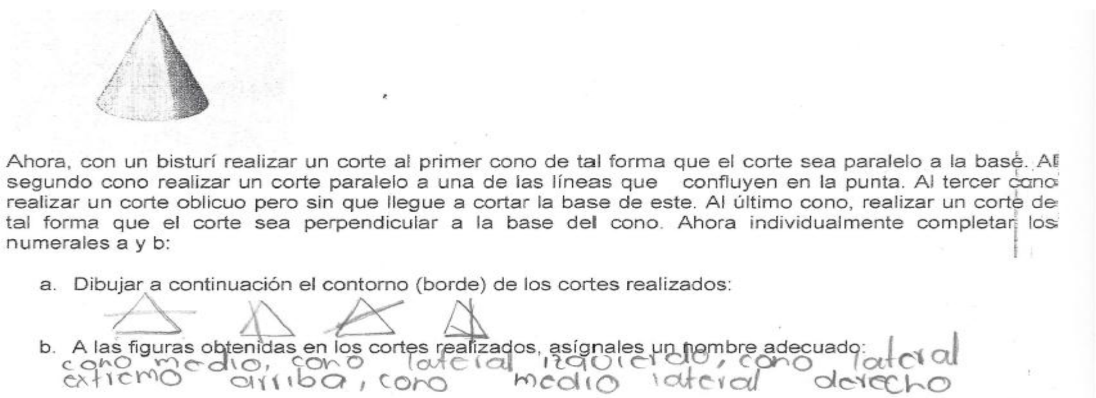
Dibujar la trayectoria que describe la piedra desde que parte de la mano del niño hasta que cae al pis

b. ¿Puede compararse con la trayectoria que describe un balón de baloncesto cuando es lanzado ha canasta? Responda: Si X No__ ¿Por qué? porque al lanzar el balon tiene una trayectoria de parabola

c. ¿Qué nombre le daría usted a la trayectoria descrita por la piedra arrojada por el niño?

parabola

Como se puede determinar en esta primera tarea el estudiante que llamaremos 1 reconoce la trayectoria pero su definición aun es incipiente a la rigurosidad matemática. Sin embargo, determina el movimiento que se realiza la piedra al ser lanzada. Esta definición dada por el estudiante en términos del EOS corresponde a una definición que es considerada la menos formal, por sus características. (Ruiz, 2013) asevera que los estudiantes no tienen mucha dificultad para reconocer la trayectoria que sigue la piedra en el recorrido que se muestra en la ilustración. Además, los estudiantes pudieron identificar el tipo de movimiento al cual se refería la ilustración.



Ahora, con un bisturí realizar un corte al primer cono de tal forma que el corte sea paralelo a la base. Al segundo cono realizar un corte paralelo a una de las líneas que confluyen en la punta. Al tercer cono realizar un corte oblicuo pero sin que llegue a cortar la base de este. Al último cono, realizar un corte de tal forma que el corte sea perpendicular a la base del cono. Ahora individualmente completar los numerales a y b:

a. Dibujar a continuación el contorno (borde) de los cortes realizados:

b. A las figuras obtenidas en los cortes realizados, asígnales un nombre adecuado: cono medio, cono lateral izquierdo, cono lateral extremo arriba, cono medio lateral derecho

La actividad que se presenta en la gráfica corresponde a la realización de unos conos y luego realizar los cortes como lo indica para formar cada una de las cónicas. En la parte inicial de la tarea, la intervención del maestro es la de indicar que las cónicas son sólidos de revolución por lo tanto los estudiantes debían utilizar la plastilina para simular cuatro conos a los cuales se les debían hacer unos cortes y luego determinar los nombres que les debían dar a esos cortes. En este sentido le dieron nombre que no correspondían a las figuras obtenidas en los cortes que se realizaron. Es curioso que en los cortes los estudiantes no lograron identificar la parábola. Esto se debió a varias posibles razones:

poca comprensión de la tarea, cortes mal realizado, lenguaje no adecuado para los estudiantes.

Deslizar la regla en forma paralela a la recta l, manteniendo la cuerda tensionada. Preguntas: Describir la gráfica que se obtiene: se obtiene una parabola medio circular

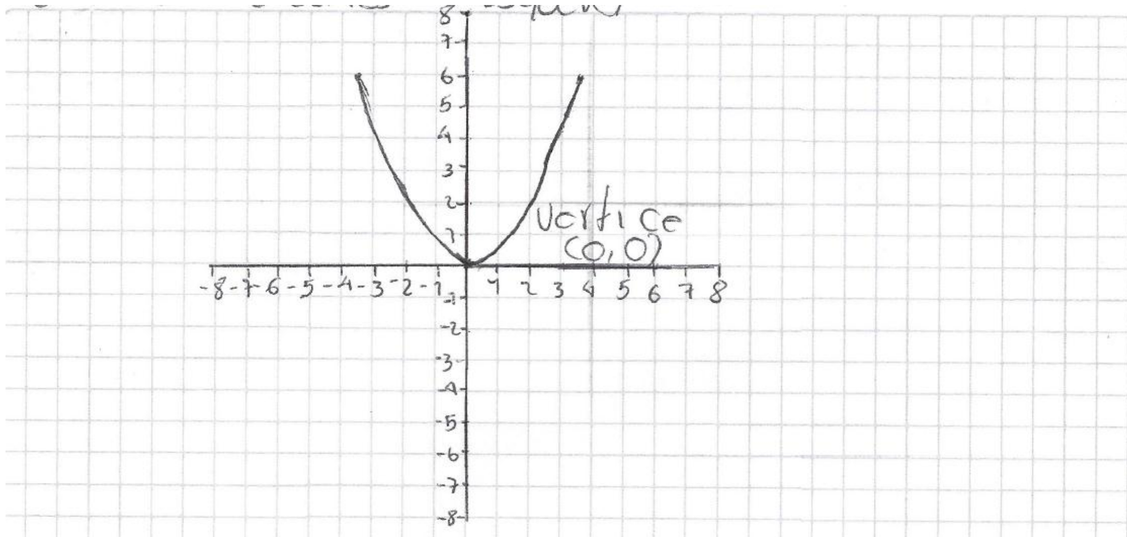
¿A qué sección cónica se asemeja la figura obtenida? A la base del cono

Sobre la gráfica obtenida ubicar un punto A ¿Qué relación existe entre la distancia del punto O al A y de la recta l al punto A? la relacion es que de un punto al otro hay una misma distancia y de la recta al punto a es doble

¿Qué otras propiedades se puede observar en la gráfica obtenida? el punto de origen da hacia arriba

Dar una definición para este tipo de curvas: es una curva medio circular

En la actividad planteada en esta tarea, consistía en elaborar con una cuerda, lápiz y escuadra, debían construir un bosquejo del objeto matemático de estudio solamente haciendo uso de los materiales enunciados anteriormente. Luego los estudiantes debían responder algunas preguntas relacionadas con la actividad que los estudiantes debían realizar. La concepción de la mayoría de los estudiantes compara la figura obtenida con algo medio circular. También responden a la sección anterior obtenida como a la base del cono. Cuando se les pregunta ellos expresan que una que se corta perpendicular a la base del cono, es decir, olvidaron algunos elementos de la actividad anterior o no las pusieron en practica



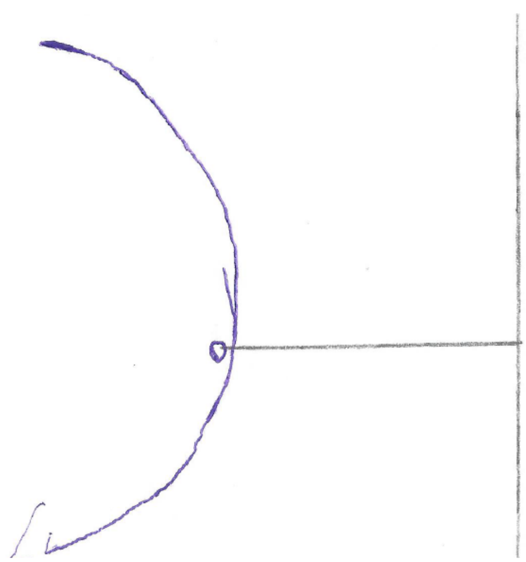
En la actividad que se muestra en la figura anterior los estudiantes de forma individual utilizaron geogebra para hacer las figuras de acuerdo a unas funciones dadas. El objetivo de la tarea consistió en encontrar algunos elementos de la parábola, en especial el vértice. Además en ella se completa el reconocimiento del objeto matemático desde diversos significados en este caso como una función que no puede ser desligada de la ecuación cuadrática. También los estudiantes enunciaron algunas características que presenta la parábola para poder hablar de sus propiedades con mayor. Precisamente los estudiantes responde que las propiedades, estableciendo una especie de simetría, pero es el estudiante no lo expresa abiertamente. También la definición en términos de la EOS, es considerada como la menos formal dentro de las que establece en este tipo de objetos matemáticos. Es decir que obedece a objetos personales.

¿A qué sección cónica se asemeja la figura obtenida? Parabola

Sobre la gráfica obtenida ubicar un punto A ¿Qué relación existe entre la distancia del punto O al A y de la recta l al punto A? Debe ser igual los dos lados

¿Qué otras propiedades se puede observar en la gráfica obtenida? que todos los lados deben estar iguales

Dar una definición para este tipo de curvas: es una parabola o curva que va de forma ovalada



Deslizar la regla en forma paralela a la recta l, manteniendo la cuerda tensionada. Preguntas: Describir la gráfica que se obtiene: Se obtiene una parabola Medio circular

¿A qué sección cónica se asemeja la figura obtenida? A la bace del cono

Sobre la gráfica obtenida ubicar un punto A ¿Qué relación existe entre la distancia del punto O al A y de la recta l al punto A? La relacion que ha de un punto han lo misma distancia y de la recta al punto es el doble

¿Qué otras propiedades se puede observar en la gráfica obtenida? El Punto de origen da hacia arriba de igual distancia.

Dar una definición para este tipo de curvas: Es una curba media circular

gráfica que se obtiene: Se obtiene una parabola: Medio circulor

¿A qué sección cónica se asemeja la figura obtenida? A lo base del cono

Sobre la gráfica obtenida ubicar un punto A ¿Qué relación existe entre la distancia del punto O al A y de la recta l al punto A? La relación es que de un punto al otro hay la misma distancia y de la recta al punto A es el doble

¿Qué otras propiedades se puede observar en la gráfica obtenida? El punto de origen da hacia arriba

Dar una definición para este tipo de curvas: Es una curva medio circular.

El estudiante tres también realiza una definición poco formal del objeto matemático que está abordando y lo relaciona con algo circular. Aunque en este caso el estudiante encuentra algún tipo de relación y la menciona en términos matemáticos que trata de establecer, aunque no es claro lo que quiere expresar. Habla del origen que puede ser el vértice y afirma que abre hacia arriba. En este sentido, los estudiantes con la tarea tratan de encontrar las relaciones que ay implícitas en la parábola como objeto matemático.

la recta l al punto A? Son iguales

¿Qué otras propiedades se puede observar en la gráfica obtenida?
Los puntos de los lados deben ser iguales

Dar una definición para este tipo de curvas:
Este tipo de curvas es una parabola desde un punto definido para formar una curva para que los lados sean iguales

Imagen estudiante uno secuencia 2

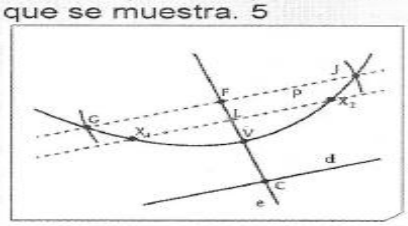
1. **Luego de ver estas imágenes y tener algo de idea de la forma de una parábola, responde.**

a. ¿Qué piensas de estas y su uso?
Pienzo que la primera la parábola que se encuentra en la parte superior fue hecha para dar belleza y mucha mas ilustración y en la segunda en el puente se puede ver que tiene forma de parabola y sus tres parabolas de la parte superior se usan con cuerdas que pueden ser de alambre metalizado para poder que el puente tenga mucha mas resistencia para que puedan pasar muchos mas automoviles por el y resistir un peso mayor al que en realidad puede cargar.

b. ¿Conoces algunas construcciones en las que se pueda ver parábolas?
El arco del triunfo de paris, el arco iris, la luna cuando esta media que es cuando estamos en creciente

Este tipo de actividades les permite a los estudiantes reconocer los objetos matemáticos en contexto, permitiéndoles reconocer la importancia de la parábola en la vida cotidiana y el uso que se le puede dar.

une los puntos que hacen parte de tu parábola obteniendo algo parecido a lo que se muestra. 5



a. ¿Cuál o cuáles elementos dan inicio a la construcción?

Compas, regla, Hoja blanca, Lapiz.

c. ¿Qué es una parábola?, para definirla, solo utiliza los elementos que hasta ahora conoces.

la parabola es una curva, o directriz con misma igualdad.

d. ¿Qué otros elementos, que consideres tienen relevancia, se crearon en la construcción

la igual medicion, directriz e igual curva.

e. ¿Qué medida tiene el segmento delimitado por los puntos G, J en la construcción?

Que el punto G y J tienen igual medicion y distancia y en la coje la curva.

Ya conocemos lo siguientes elementos de una parábola: vértice, eje focal o eje simétrico, foco, directriz y lado recto.
Además ya sabemos que una parábola se define como todos los puntos que equidistan (tienen la misma distancia) del foco a la directriz.
Es hora de conocer otro tipo de elementos de la parábola.

Estudiante 2

1. Luego de ver estas imágenes y tener algo de idea de la forma de una parábola, responde.

a. ¿Qué piensas de estas y su uso?

La parabola es una curva que tiene un eje o directriz. su uso es para formar una estructura adecuada y una buena parabola.

b. ¿Conoces algunas construcciones en las que se pueda ver parábolas?

si, las montañas, ventanas, arcoiris, puentes, estadios, iglesias, puertas y en las ondas delgada

La estudiante dos muestra una definición que acerca más a ser de carácter formal cuando explica algunos elementos de esta como la directriz. Este concepto en los otros trabajos realizados por los estudiantes no aparecía. Por tanto se evidencia un avance hacia las propiedades de la parábola como objeto matemático desde el enfoque ontosemiótico

a. ¿Cuál o cuáles elementos dan inicio a la construcción?

iniciamos con la directriz y los puntos de corte q nos indican q debemos hacer.

c. ¿Qué es una parábola?, para definirla, solo utiliza los elementos que hasta ahora conoces.

una parabola es una curva q tiene ejes y directriz

d. ¿Qué otros elementos, que consideres tienen relevancia, se crearon en la construcción

En la medida que los estudiantes van realizando las tareas se muestra que se van familiarizando con los elementos del objeto matemático. Así van descubriendo algunas propiedades de la parábola y apropiándose de los conceptos. Es un inicio para la conceptualización y desde allí se puedan generar procesos de argumentación presentes en el reconocimiento del lenguaje, los conceptos y los significados relacionados con estos.

Realizando las actividades, la interaccion entre los estudiantes, estudiantes- docente

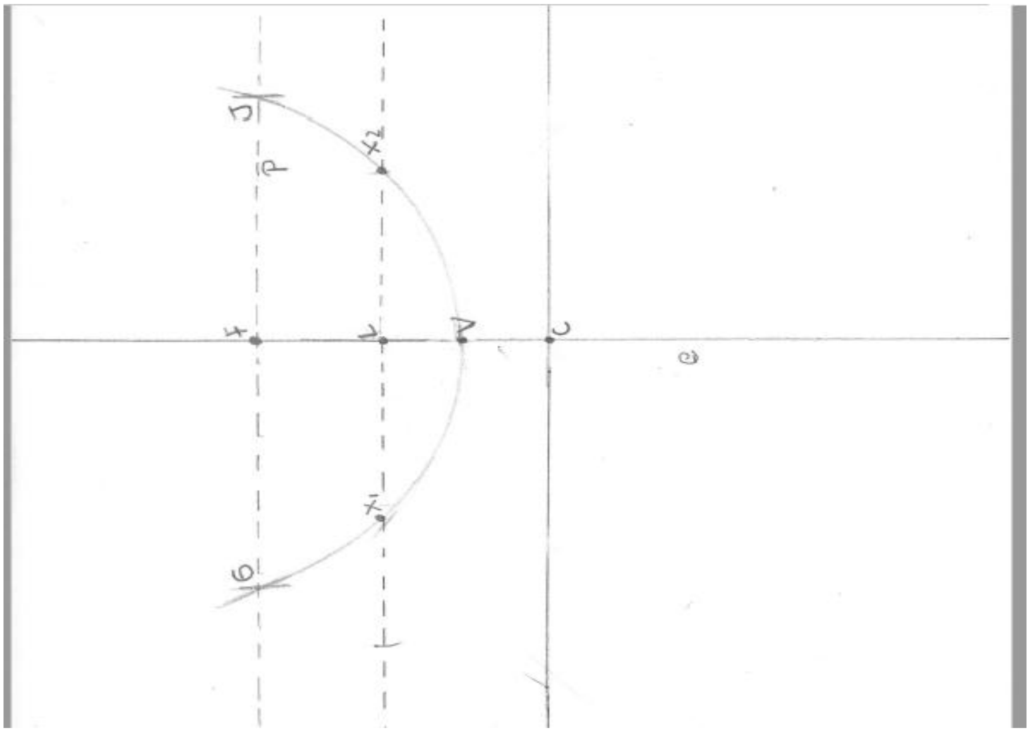
La relevancia q" tiene es que siem-
pre tiene un eje o directriz q"
nos ayudara a construir la parabola

e. ¿Qué medida tiene el segmento delimitado por los puntos G, J en la construcción?

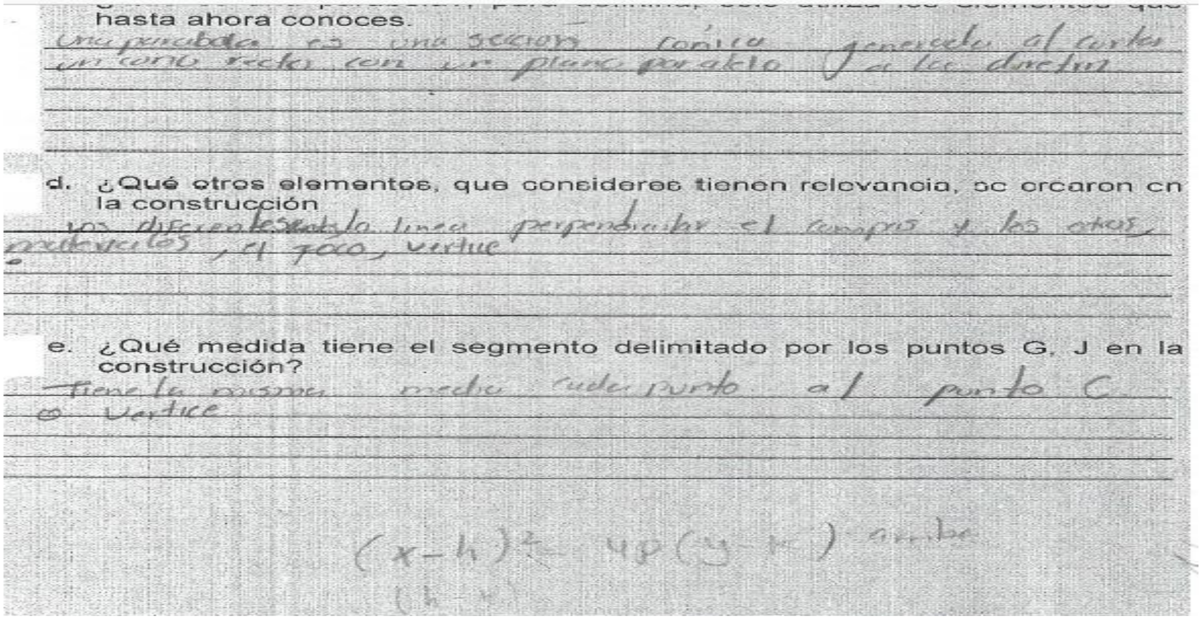
La medida es igual desde el punto
f hasta el J,6. y tiene una curva
en la V

Ya conocemos lo siguientes elementos de una parábola: vértice, eje focal o eje simétrico, foco, directriz y lado recto.

En la medida que los estudiantes van realizando las tareas se van acomodando a los conceptos y van hablando con propiedad de ellos. Aunque no hay argumentación en el trabajo de los estudiantes se presenta un avance en el lenguaje respecto a la parábola como objeto matemático. Al respecto (Ruiz, 2013) afirma que los estudiantes refuerzan sus competencias cuando se utilizan esquemas alternativos de enseñanza diferentes al sistema tradicional.



Este estudiante realiza de forma adecuada la figura siguiendo los procedimientos adecuados. Esto demuestra que acude a elementos necesarios para obtener un procedimiento adecuado. (De A´more, 2007). *La noción de significado institucional y personal de los objetos matemáticos implica las de práctica personal, sistema de prácticas personales y objeto personal (o mental), que son herramientas útiles para estudiar la "cognición matemática individual" (Godino y Batanero, 1994, 1998). Cada uno de esos conceptos tiene su versión institucional, y con ellos se trata de precisar y hacer operativo el término de relación personal e institucional al objeto, introducido por Chevallard (1992).*



hasta ahora conoces.

Una parabola es una seccion conica generada al cortar un cono recto con un plano paralelo a la directriz

d. ¿Qué otros elementos, que consideres tienen relevancia, se crearon en la construcción

los diferentes la linea perpendicular el compás y los otros puntos, el foco, vertice

e. ¿Qué medida tiene el segmento delimitado por los puntos G, J en la construcción?

Tiene la misma medida cada punto al punto C o vertice

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ arriba

(h, k)

Finalmente se puede observar que los estudiantes se acercan a una definición del objeto matemático que parece más formal con base en las tareas propuestas. Además en el ejemplo se denota que los estudiantes tratan de deducir la formula mediante el uso de la definición entre dos puntos. Aunque en la entrevista no parece que la tuvieran clara. En este aparte, cuando se les pregunta a los estudiantes de donde pueden deducir la formula no presentan mucha claridad para su deducción.

IDONEIDAD INTERACCIONAL

(Godino, 2011) define la idoneidad interaccional como el grado de los modos de interacción que permiten identificar y resolver conflictos de significado. En tal sentido es importante que se tenga en cuenta cuando interviene el docente en el proceso o tareas propuesto y cuando los estudiantes interactúan entre si favoreciendo el conocimiento. En cierta forma cuando ellos debaten sobre las tareas entre si tienen posibilidades de compartir sus saberes y reforzar el aprendizaje. También surgen de los diálogos diversas hipótesis que son resueltos cuando el docente interactúa con ellos. En este caso la evaluación debe de ser de tipo formativo ya que se debe hacer durante el proceso. Así, para evaluar la idoneidad, se tuvieron en cuenta los siguientes indicadores.

Tabla 21. Análisis de indicadores de idoneidad interaccional

Tomado de (Godino, 2011)

COMPONENTES	**INDICADORES**
Interacción docente-discente	-El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos claves del tema, etc.) -Reconoce y resuelve los conflictos de los estudiantes (se hacen preguntas y respuestas adecuadas sobre el objeto matemático) -Se usan diversos elementos de las historia del objeto matemático y de sus usos en el contexto para capturar la atención de los estudiantes. -Se facilita la participación de los estudiantes en las prácticas de clase.
Interacción entre estudiantes	-Se favorece el dialogo y la interacción de los estudiantes dentro las actividades realizadas. -Los estudiantes refuerzan para sí mismos los conocimientos adquiridos. -Se evita la exclusión de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades.
Autonomía	-En el desarrollo de las actividades los estudiantes plantean diversas posiciones frente a conceptos, procesos y utilizan diversas herramientas para comunicarlo a los demás estudiantes.

Para determinar el nivel de idoneidad interaccional se utiliza la técnica del discurso grabado que permite reconocer las preguntas, e intervenciones tanto de docentes como de estudiantes. En este aspecto es necesario reconocer que también se grabaron a los estudiantes en sus conversaciones para ver el nivel de interacción que se puede presentar entre ellos y como estas contribuyen en el aprendizaje del objeto matemático propuesto.

Interacción docente-discente

La presentación de la parábola como objeto matemático inicia con una tarea creativa que el docente propone a los estudiantes sobre algunas construcciones que tienen forma de parábola y que deben reconocer, armando por equipos un rompecabezas con el fin de identificar la figura. Luego cada grupo debe explicar la forma que tiene la figura y saber si la conocen. En este caso el docente realiza la intervención y refuerza lo dicho por los estudiantes. Luego los estudiantes hacen la guía diagnostica de forma individual y se realiza un conversatorio sobre los conceptos que ellos tienen pero sin ahondar en ellos. Es de anotar que hasta el momento no se les había hablado del tema.

La pregunta sobre la parábola comienza con la primera tarea. Es allí donde se empezó a explicar la historia de este objeto, su evolución y la forma como se puede configurar las situaciones didácticas contribuyendo a los aprendizajes.

Interacción dicente-discente

El EOS plantea como objetos personales, los lenguajes que se pueden configurar entre estudiantes. Es un espacio para el dialogo sobre los conocimientos personales que tienen sobre el objeto matemático. En el estudio sobre la parábola como objeto matemático desde el enfoque ontosemiótico, se puede evidenciar que en un inicio, el dialogo entre los estudiantes sobre las tareas planteadas era muy reducido. En su lenguaje no había mucho que expresar sobre los conceptos enunciados. La evolución de estos, de las propiedades, argumentos se debe también a la interacción de estos entre sí, con el docente y con los materiales y las mediaciones que pueden resultar de estos.

Autonomía

En el aprendizaje de la parábola como objeto matemático, es muy importante la construcción de conceptos. Para ello, el uso de preguntas, imágenes y la presentación de diversas formas de lenguaje, permiten las ideas personales, la discusión de grupo y la formación de todos frente a los conceptos y propiedades del objeto matemático. (Godino, 2011) plantea que *se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)*. En el aula de clase se ponen en juego diversas alternativas que permiten realizar conjeturas, evaluar el otro compañero, hacer revisiones personales con base en la construcción colectiva, el devenir del pensamiento matemático que se pone en juego con tareas como las planteadas. En clase siempre resultaran situaciones de tipo a didáctico que permiten reforzar lo didáctico. Es en la interacción entre los estudiantes y docente-estudiante que se favorecen todas estas situaciones y permiten la transformación de los objetos matemáticos de los menos formales, llamados de tipo personal a unos más formales conocidos como institucionales. El paso de los objetos personales a otros formas más dadas por las normas concurren en el aprendizaje. (Vygotsky, 1934) reconoce a través de sus estudios que el aprendizaje se da en contextos donde el lenguaje cobra validez y que este es una forma efectiva de trasmitir la cultura y los saberes. Además considera que el aprendizaje se encuentra en la zona de desarrollo próximo, donde la interacción entre docente-dicente- mediadores favorece su construcción. En el trabajo realizado por los estudiantes algunos logran la conversión del lenguaje grafico a algebraico mediante el uso de las tareas que realizan gracias a la posibilidad que tienen los estudiantes de compartir entre sí, con el docente y con las mediaciones propuestas para la realizar durante la experiencia.

CONCLUSIONES Y PREGUNTAS ABIERTAS

Si miramos el objetivo general de este trabajo que consistió en *Fortalecer el aprendizaje de la parábola desde el marco teórico ontosemiótico, en estudiantes de grado decimo del Instituto Mistrató del municipio de Mistrató Risaralda, mediante la resolución de tareas en contexto.* Del cuales hemos tomado tres objetivos específicos (OE) los cuales vamos a enunciar para realizar los conclusiones del trabajo que nos hemos propuesto.

Se realizó un análisis a priori de los conocimientos que tenían los estudiantes sobre el objeto matemático. Para ello se hizo una prueba diagnóstica con base en la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) al grupo de grado once que desde los estándares de calidad emitidos por el MEN y los derechos básicos de aprendizaje ya por lo menos debían haber estudiado en las clases de matemáticas. Incluso los estudiantes de este grado ya tendrían alguna idea de la parábola como función. También se aplicó la prueba al grupo base pero este con el fin de mirar el lenguaje que presentaban los estudiantes frente las imágenes, propiedades, argumentos y demás relacionados con el objeto matemático de estudio. En este sentido es importante reconocer que los estudiantes tienen objetos personales muy de la cotidianidad en relación con la parábola y sus elementos. Aunque (Aldana y López, 2013) utilizan la ingeniería didáctica para establecer el aprendizaje de estudiantes universitarios sobre la parábola llegan a la conclusión que en la fase didáctica ayuda a los estudiantes a reconocer nociones básicas de este objeto matemático. Su estudio a didáctico por el contrario realizo hallazgos de errores y equivocaciones sobre la parábola y las implicaciones en el aprendizaje. En este estudio que realizamos desde la prueba diagnóstica, encontramos que no hay un reconocimiento de la parábola, incluso como función o ecuación de segundo grado.

Seria especialmente interesante realizar un estudio de la parábola como función con mediadores que permitan su construcción y reconocimiento y que este conocimiento sea aplicado en otros contextos como la física, artes entre otras

Se plantearon unas tareas que fueron analizadas teniendo en cuenta los conflictos que se pueden presentar durante la ejecución de las mismas. Al aplicar las tareas se tuvo en cuenta los elementos del EOS respeto a lo epistémico, cognitivo e interaccional. Durante el desarrollo de las tareas se realizó observación permanente de la actuación de los estudiantes en todos los momentos, unos de estos personales, los otros en grupos y algunos de ellos con el docente quien acompaño siempre al grupo compartiendo sus conocimientos y resolviendo las preguntas que tenían los estudiantes respecto a la parábola como objeto matemático. En este sentido el análisis inicial de las tareas a aplicar puede tener variaciones por los elementos que los estudiantes puedan presentar como conocimientos emergentes.

Se hizo un análisis de las tareas que los estudiantes realizaron y las idoneidades. Este análisis a la luz de las tareas realizadas, las idoneidades planteadas desde el EOS y los indicadores de cada uno permiten ajustar la información y reconocer los niveles expresados por en la misma para la idoneidad desde lo epistémico, cognitivo e interaccional, se han propuesto los elementos centrales de esta guía para hacer la prueba diagnóstica, elaborar análisis y obtener resultados.

A nivel de concepción de mayor idoneidad didáctica desde las tres que abordamos, se puede concluir que se obtiene un mayor grado de estas si se cumplen exactamente los pasos propuestos desde el EOS, es decir desde la planeación, la ejecución y el análisis. Para el caso de una idoneidad epistémica requiere un mayor análisis hermenéutico de los objetos matemáticos por parte de docente. Es muy difícil llegar a un aprendizaje cuando no se conoce la evolución de los objetos matemáticos y las salidas que presentan diversos obstáculos de cualquier tipo que sean planteados. En esta aparte se requiere una rigurosidad en las tareas y un análisis de estas más exhaustivo.

La idoneidad cognitiva, no incluye, solo el saber del docente, se hace necesario que los estudiantes interactúen, que se reconozcan los saberes previos y que se construyan en conjunto los nuevos conocimientos con la participación de todos. En este sentido (Vygotsky, 1934), plantea que la zona de desarrollo próximo de los sujetos se desarrolla con la ayuda de otros. Esta concepción también es retomada desde el EOS con el privilegio del trabajo en equipo.

Queda abierta la posibilidad de explorar, todos los lenguajes y significaciones matemáticas de la parábola haciendo uso de tareas y reconociendo desde la planeación los significados de los objetos puestos en cuestión de cada tarea. Para lograrlo, desde la planeación se debe reconocer las idoneidades y ajustar las tareas sobre ellas. Esta visión de los objetos personales e institucionales en la práctica permite mejorar las idoneidades propuestas.

BIBLIOGRAFIA

Aguilar, M. E. (2009). Las ideas de Bruner "de la revolución cognitiva" a la "revolución Cultural". *Ideas y Personajes*, 235-241.

Albores, I. A. (12 de noviembre de 2015). *eumed*. Obtenido de google: http://www.eumed.net/libros-gratis/2015/1457/principio-conteo.htm

Aldana y López. Estudio histórico, epistemológico y didáctico de la parábola. Revista praxis y saber. Vol 9 Nº 19. Pag 63-88

Aldana, E. y. (2013). La comprension del concepto de Parábola: un estudio de caso. *VII CIVEM*, (págs. 1-8). MONTEVIDEO.

Artigue, M. D. (1995). *ingenieria Didactica en Educación Matemática.* Bogota: Grupo Editorial Iberoamericana.

Baldor, A. (s.f.). *Algebra de Baldor.* la Habana: Ministerio de Educación de Cuba.

Bauman, Z. (2007). *Los Retos de la Educcación en la sociedad liquida.* Barcelona: gedisa.

Blanco, T. F. (2014). Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. *Universidad de Compostela*.

Calleja, A. C. (s.f.). Diseño de una trayectoria hipotética de aprendizaje para la construcción del concepto de dependencia lineal. *universidad de alicante*.

Cañadas, C. (s.f.). Patrones, generalizacion y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de educacion secundaria obligatoria en problemas de baldosas. *PNE*, 1-15.

Carmen Sanchez Gómez. (s.f.). Analisis de una experiencia de enseñanza de la nocion de límite funcional con herramientas del enfoque ontosemiótico.

Castro, M. C. (s.f.). *Errores en la resolución de problemas matemáticos de caracter inductivo.*

Catalan, M. C. (s.f.). *las Regletas de Cusinaire.*

Cerda, G. H. (2007). *La Investigación formativa en el aula.* Bogotá: Investigar magisterio.

Chacon, I. M. (s.f.). *Visualizacion e intuición en investigacion y Educación Matemática.*

Cruz, M. (2006). *La enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas.* La Habana : Edición cubana .

De A`more, B. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *alme*, 1-36.

Delgado, R. J. (2013). La enseñanza de la Matemática desde una óptica vigotskiana . 1-15.

Dubinsky, E. (2001). De la investigación en la matemática teórica a la investigación en la matemática educativa: un viaje personal. *Relime*.

Duval, R. S.-L. (2016). *Comprensión y aprendizaje en Matématicas: perspectivas semioticas seleccionadas.* Bogotá D.C: Universidad Distrital Francisco Jose de Caldas.

estandares curriculares. (2004). En MEN.

Fernandez, M. (2005). Los nuevos principios y estándares del NTSC en castellano. *SUMA*, 105-112.

Gaitan Mervin, L. R. (2014). Comprension del Aprendizaje de la Parabola en Undecimo Grado Aplicando el modelo de Van Hiele. *Ciencia e Interculturalidad*, 13.

Gaitan, M. A. (2014). Comprensión del aprendizaje de la parabola en undecimo grado aplicando el modelo de Van Hiele. *Ciencias e Interculturalidad*, 21-33.

Galeano, J. R. (s.f.). *para ser educador en el siglo XXI.* aula Abierta.

Garcia, J. R. (2013). *Proyecto Los Caminos del Saber matematicas 10.* Bogotá: Santillana.

Garcia, S. (2011). *Rutas de acceso a la generalización como estrategia de resolución de problemas utilizada por estudiantes de 13 años.* Bogota: Universidad pedagogica Nacional.

García-Escudero, A. M.-I.-G. (2017). Fitting parabolas in noisy images. *Computational Statistics and Data Analysis*, 80-87.

Godino. (1994). significado personal e institucional delos objetos. *relime vol 17*, 1-60.

Godino. (2001). El enfoque ontosemiotico en la educación Matemática. *relime vol 17*, 21-94.

Godino. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiotica de la investigación en didáctica de las matemáticas. *Investigación y Educación matemática*, pp49-66.

Godino, A. C. (2006). Analisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *recherches en didactique des mathematiques*, 39-88.

Godino, B. d. (s.f.). *El enfoque ontosemiotico como un desarrollo de la teoría antropológica en la didáctica de las matemáticas.*

Godino, C. B. (2001). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *universidad de Granada*, 1-24.

Godino, C. B. (s.f.). un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

Godino, J. (1994). El enfoque ontosemiotico de la cognición matemática. En e. a. Godino, *Marcos teóricos de la cognición matemática* (págs. 1-92). Buenos Aires: Saeta.

Godino, J. (1999). El ennfoque ontosemiótico de la cognicion.

Godino, J. (2010). Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. 1-47.

Godino, J. (2011). Indicadores de Idoneidad didactica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas . *Departamento de didactica de las matemáticas* , 1-19.

Godino, J. C. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje para maestros.* Granada, España: Proyecto Edumat-maestros.

Godino, J. M. (2013). Conflictos Epistémicos en un Proceso de Estudio de la Noción de función. Implicaciones en la formación de profesores. *ALME*, 349-355.

Godino, L. A. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 25 - 48.

Godino, V. F. (2001). Modelo para el Analisis didáctico en educación Matemática. *universidad de Granada*, 1-18.

Gomez, M. A. (2014). cincuenta años de reformas en el curriculo colombiano de matemáticas en los niveles básico y medio de educación. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 155-176.

Gonzato, T. F. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualizacion y orientacion espacial. *Numeros*, 97-117.

Guadalupe, i. e. (2000). *master 2000*. Obtenido de https://master2000.net/recursos/fotos/251/Textos%20Gen%C3%A9ricos%20Preescolar.pdf

Hernandez, s. C. (1999). Matemáticas en Colombia en el siglo XIX. *llull*, 687-705.

Jarauta, B. (2012). *pensando en el futuro de la Educación.* Barcelona: Critica y fundamentos.

Jimenez, L. G. (s.f.). Una propuesta diddactica para abordar la parabola utilizando el procesador geométrico. *UNAM Mexico distrito federal*, 13.

Lozano, C. S. (2014). *Practicas de lectura en la escuela.* Bogota: Rio de letras .

Maenza, R. R. (2009). Enfoque ontosemiótico del aprendizaje empleado como metodologia de analisis de espacios virtuales educativos. *universidad del Rosario*, 1-11.

Martinez, J. G. (2012). Razonamiento configural y procedimientos de verificacion en contexto geométrico. *Relime*, 340-368.

Mason. (1998). Expresion de la Generalidad. *Raiz 1A*, 16-35.

Medina, M. d. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años.* Mexico.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de Lengua Castellana.* Bogotá D.C: Magisterio.

MEN. (1998). *lineamientos curriculares de matematicas.* Santa Fe de Bogotá: Magisterio.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de Matematicas.* Bogotá D.C: Magisterio.

MEN. (2002). *Estandares para la excelencia de la educacion.* BOGOTA: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2012). fortalecimiento de las Competencias en Preescolar. En MEN. Bogota.

Moll, L. c. (2005). La zona de desarrollo proximo de Vygostki: Una reconsideración de sus implicaciones para la enseñanza. *Dialnet*, 247-254.

Obando, G. J. (2005). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. *Educación y pedagogía*, 185-199.

Obando, Z. G. (2018). las situaciones problema como estrategia para la coceptualización matamática. *Educación y pedagogía*, 183-199.

Ramos, P. (2002). Parabola. *Geometria analitica revista universitaria vol 2*, 23.

Rincon, J. P. (2005). *Visualización en geometría: la rotación y la traslación en el videosjuego como actividad socialmente compartida.*

Ruano, R. (2008). Analisis y clasificación de errores cometidos por estudiantes de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalizacion y modelizacion del algebra.

Salinas, M. (2010). Iniciación al estudio de las situaciones didacticas. *revista Q*, 1-7.

Socas, M. (1994). Algunos obstaculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Suarez, O. J. (2016). Aprendizaje de la matemática, una condición necesaria para el aprendizaje de la fisica a novel superior. *Revista Academia y Virtualidad*, pp 24-40.

Turégano, P. (2006). Una Interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. *Plaza Universidad*, pag 35-48.